

Math. P.

364.5

Math. 9²

364 $\frac{f^c}{d=}$

Müller

LEITFADEN
DER
STEREOMETRIE,

MIT BENUTZUNG
NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON
Dr. HUBERT MÜLLER,
OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,
FRÜHER AUSSERORDENTL. PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI THEILEN:
I. DIE GRUNDGEBILDE UND DIE EINFACHSTEN KÖRPERFORMEN.
II. ERWEITERUNGEN ZUM ERSTEN THEILE UND DIE ELEMENTE DER
NEUERN GEOMETRIE IM RAUME.

ERSTER THEIL.

DIE GRUNDGEBILDE UND DIE EINFACHSTEN KÖRPERFORMEN.



MIT ZAHLREICHEN HOLZSCHNITTEN UND DREI TAFELN.

LEIPZIG.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1877.

*muss nicht sein
Hinrich*

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Von Dr. Karl Heinrich Bierseemann. gr. 8. 1871. geh. 1 Mark 20 Pf.

Abriss der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen. Von Dr. E. Schröder. I. Heft: Die sieben algebraischen Operationen. 8. 1874. geh. 60 Pf.

Leitfaden beim ersten Unterricht in der Algebra, enthaltend die sieben Rechnungsoperationen, systematisch geordnet und methodisch behandelt. Von Dr. Franz Sommer, Oberlehrer zu Münster-eifel. gr. 8. 1874. geh. 60 Pf.

Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enth., über alle Theile der Elementar-Arithmetik für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten. Von E. Bardey. 6. Auflage. gr. 8. 1877. geh. 2 Mark 70 Pf.

Resultate hierzu 1 Mark. [Werden nur an Lehrer geliefert.]

Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maases. Ein Lehrbuch von Dr. O. Schlömilch. I. Theil: Planimetrie und ebene Trigonometrie. 5. Aufl. 8. 1874. geh. 4 Mark.

II. Theil: Geometrie des Raumes.

3. Aufl. gr. 8. 1874. geh. 4 Mark.

Elemente der Geometrie. Von J. Frischauf, Professor in Graz. Zweite umgearbeitete Auflage. gr. 8. 1877. geh.

Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. Von Dr. Hubert Müller. I. Theil: Die gradlinige Figur und der Kreis. gr. 8. 1874. geh. 2 Mark.

II. Theil: Die Kegelschnitte und die Ele-

mente der neueren Geometrie. gr. 8. 1875. geh. 1 Mark 60 Pf.

Leitfaden der ebenen Geometrie mit 700 Uebungssätzen und Aufgaben. Von Dr. Julius Kober. gr. 8. 1874. geh. 1 Mark.

Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von F. J. Brockmann. Erster Theil: Die Planimetrie. 2. Aufl. Mit 138 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1877. geh. 2 Mark. Zweiter Theil: Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1875. geh. 1 Mark 60 Pf.

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet von F. J. Brockmann. Mit 46 Holzschnitten. gr. 8. 1869. geh. 1 Mark 60 Pf.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bearbeitet von O. Fort und O. Schlömilch. Mit vielen Holzschnitten. 2 Theile. gr. 8. geh. 9 Mark.

Einzeln: I. Theil: Analyt. Geometrie der Ebene. Von O. Fort. 4. Aufl. 4 Mark.

II. Theil: Analyt. Geometrie des Raumes. Von O. Schlömilch. 3. Aufl. 5 Mark.

*) Ein vollständiges Verzeichniss des ausgedehnten Teubner'schen Verlags auf dem Gebiete der Mathematik, Physik und technischen Wissenschaften, darunter insbesondere Werke von Cantor, Clebsch, Durège, Fiedler, Gordan, Hesse, Kirchhoff, Neumann, Salmon, Schlömilch, Steiner, Sturm u. A., ist in allen Buchhandlungen gratis zu haben. Hier sind nur diejenigen Werke aufgeführt, welche etwa beim Unterricht an Gymnasien, Real- u. technischen Hochschulen benutzt werden können.

LEITFADEN
DER
STEREOMETRIE,

MIT BENUTZUNG
NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON
Dr. HUBERT MÜLLER,
OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,
FRÜHER AUSSERORDENTL. PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI THEILEN:
I. DIE GRUNDGEBILDE UND DIE EINFACHSTEN KÖRPERFORMEN.
II. ERWEITERUNGEN ZUM ERSTEN THEILE UND DIE ELEMENTE DER
NEUERN GEOMETRIE IM RAUME.

ERSTER THEIL.

DIE GRUNDGEBILDE UND DIE EINFACHSTEN KÖRPERFORMEN.



MIT ZAHLREICHEN HOLZSCHNITTEN UND DREI TAFELN.

LEIPZIG.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1877.

LEITFADEN

DER

STERNFOMERIE

DES

STERNFOMERIE

DES

DR. HUBERT MÜLLER

VERLEGER

VERLAG

VERLAG

IN WELCHER

IN WELCHER



VERLAG

LEITFADEN

DRUCK UND VERLAG

1877

Vorwort.

Obgleich diejenigen Abschnitte der Stereometrie, welche mit der neueren Geometrie nähere Verwandtschaft haben, von diesem Theile ausgeschlossen werden mussten*, so glaube ich doch, dass man überall den Einfluss neuerer Anschauungsweisen bemerken wird. Es kann nicht die Sache des Vorwortes sein, die Darstellung im Einzelnen zu rechtfertigen. Ueber den Inhalt des Werkchens glaube ich jedoch einige Angaben machen zu müssen. Ich bin von der Ansicht ausgegangen, dass eine zu weit getriebene Auswahl des Stoffes die freie Bewegung des Lehrers hemmt und dass insbesondere Lehrbücher der Stereometrie, welche sich lediglich auf Beweise von Lehrsätzen beschränken, einen anregenden Unterricht zu wenig unterstützen. Ich erwähne aus dem Inhaltsverzeichnisse besonders folgende Theile:

1) Drei Abschnitte über Projectionslehre und zeichnende Geometrie mit zwei Figurentafeln. Bei Abfassung derselben habe ich zwar vorzüglich die Bedürfnisse des Gymnasiums im Auge gehabt, für welches es wünschenswerth ist, auch durch die Lehrbücher einer Zurücksetzung der Anschauung entgegen zu arbeiten. Aber auch für Realschulen kann durch diese Capitel ein Ineinandergreifen des Zeichnens und des mathematischen Unterrichtes erzielt werden, welches beiden Disciplinen nützlich ist.

* Die Abschnitte über Symmetriellehre, Aehnliche Systeme, Anwendung der Aehnlichkeitslehre auf die Kugel, Pole und Polarebenen in Bezug auf die Kugel beabsichtige ich in einem zweiten Theile zu behandeln, der auch die fundamentalsten Eigenschaften der Regelschaaren und Regelflächen, der Raumcurven dritter Ordnung und der Flächen zweiter Ordnung enthalten soll.

Der Inhalt der drei Abschnitte kann zum grossen Theile in Quarta, Tertia und Secunda zum Eigenthum der Schüler werden. Man müsste allerdings zu diesem Zwecke die einfachsten Sätze der Stereometrie anschaulich vorführen und die Schüler der Prima würden dann mit um so grösserem Interesse dem Unterricht folgen, welcher zeigt, wie die schon längst in ihrer Bedeutung für die Raumlehre erkannten Sätze mit Hülfe neuer Axiome auf die Sätze der ebenen Geometrie zurückgeführt werden können. Die so oft bedauerte Trennung von Planimetrie und Stereometrie würde dadurch an Schärfe verlieren.

2) Das Kapitel, welches über die körperlichen Ecken handelt, enthält eine Ableitung der Hauptformeln der sphärischen Trigonometrie, wie sie gerade im Zusammenhange mit der Construction körperlicher Ecken auf leichte Weise geführt werden kann. Für die Betrachtungen der mathematischen Geographie im Gymnasialunterricht sind diese wenn auch für logarithmische Rechnung unbequemen Formeln ausreichend und für die Realschule würde nur noch die Umformung der Fundamentalgleichungen zu logarithmischer Rechnung nöthig sein, um die sphärische Trigonometrie zu vervollständigen.

3) Jedem Abschnitte ist ein Paragraph mit leichten Uebungen beigegeben. Bei dem über Kugel und Kegel handelnden Abschnitt finden sich systematisch fortschreitende Uebungen über Kartenprojection (hierzu eine besondere Figurentafel), ein Gegenstand, der meist nicht zur Behandlung kommt, weil Mathematik und Geographie sich denselben gegenseitig überlassen.

4) Es ist gewöhnlich, dass von den beiden Kapiteln über „körperliche Ecken“ und „Sphärik“ nur das eine selbstständig behandelt wird um das andere darauf zurückzuführen. Weil ich der Wahl des Lehrers nicht vorgreifen wollte, habe ich beide Kapitel unabhängig hingestellt. Es ist leicht in dem einen derselben die Vereinfachungen eintreten zu lassen, die sich nach der Durchnahme des andern darbieten.

Man sieht wohl schon aus dem Gesagten, dass das Buch nicht beansprucht, Seite für Seite durchgenommen zu werden. Nur die zwei ersten Abschnitte sind als Grundlage für das Spätere vorausgesetzt. Im übrigen Gebiete des Lehrstoffes kann sich der Lehrer mit grosser Freiheit bewegen.

Die in vorliegendem Buche eingeschlagene Richtung hat die Billigung der 31. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner erhalten. Die mathematisch-naturwissenschaftliche Section fasste die Resolution*:

„Im Unterricht der Elementargeometrie an Realschulen und Gymnasien bleibt die Euklidische Geometrie dem System nach bestehen, wird aber im Geiste der neueren Geometrie reformirt.“

Dabei fand mein Leitfaden der ebenen Geometrie** wiederholte Besprechung und die günstigste Beurtheilung. Namentlich wurde ausgesprochen, dass die darin begonnenen Bemühungen mit grosser Freude zu begrüßen seien.

Metz, im Mai 1877.

Dr. H. Müller.

* Sitzungsbericht von Prof. Dr. Hauck in Hoffmanns Zeitschrift für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht VII.

** Zwei Theile, Leipzig bei B. G. Teubner 1874 und 1875.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Cursus.

Die Grundgebilde und die Entstehung von Körperformen.

	Seite
I. Abschnitt. Punkte, Ebenen und gerade Linien im Raume	1
§ 1. Die Ebene. — § 2. Der Strahlenbündel und das ebene System. — § 3. Lagen von geraden Linien gegen einander. — § 4. Lagen von Ebenen und geraden Linien gegen einander. — § 5. Parallele Ebenen. — § 6. Ebenen und Geraden in normaler Lage. — § 7. Fortsetzung. — § 8. Senkrechte Abstände und Neigungswinkel. — § 9. Keilwinkel und Normalschnitte derselben. — § 10. Zwei geometrische Oerter. — § 11. Uebungen.	
II. Abschnitt. Entstehung von Raumfiguren	16
§ 12. Körperliche Ecken, Prismen und Pyramiden. — § 13. Kegel, Cylinder und Kugel. — § 14. Rotationsflächen. — § 15. Zwei Sätze über Polyeder. — § 16. Uebungen.	

Zweiter Cursus.

Projectionslehre.

III. Abschnitt. Projectionslehre (theoretischer Theil)	26
§ 17. Centrische Projection und Parallelprojection. — § 18. Centrische Projection; Fall, wo die Projectionsebenen parallel sind. — § 19. Perspective Lage. Aehnliche Polyeder. — § 20. Centrische Projection; Fall, wo die Projectionsebenen nicht parallel sind. — § 21. Parallelprojection; affine Figuren. — § 22. Uebungen.	
IV. Abschnitt. Darstellung von Körperformen in schiefwinkliger Parallelprojection	34
§ 23. Das Axenkreuz. — § 24. Der Würfel; Uebungen. — § 25. Das Octaeder; Uebungen. — § 26. Das Tetraeder; Uebungen. — § 27. Pyramidenwürfel und Pyramidenoctaeder; Uebungen. — § 28. Das Rhombendode-	

	Seite
kaeder Uebungen. — § 29. Combinationen; Uebungen. — § 30. Regelmässiges Ikosaeder; Uebungen. — § 31. Regelmässiges Dodekaeder; Uebungen. — § 32. Abbildung des Kreises.	
V. Abschnitt. Normalprojection; Grundriss und Aufriss	45
§ 33. Grund- und Aufriss. — § 34. Uebungen über den Würfel. — § 35. Uebungen über Wendungen von Körpern und Flächen; Schnittfiguren von Körpern und Flächen. — § 36. Uebungen.	

Dritter Cursus.

Berechnung der Körper.

VI. Abschnitt. Berechnung von Oberflächen	56
§ 37. Oberflächen von vollständigen Pyramiden und Kegeln. — § 38. Oberflächen von abgestumpften Pyramiden und Kegeln. — § 39. Oberflächen von Prismen und Cylindern. — § 40. Hülfssatz zur Berechnung der Kugeloberfläche. — § 41. Berechnung der Kugeloberfläche, — § 42. Uebungen.	
VII. Abschnitt. Rauminhalt der Körper	64
§ 43. Vergleichung des Rauminhaltes; Prismen und Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe. — § 44. Fundamentalsätze zur Berechnung des Rauminhaltes. — § 45. Berechnung von Prismen und Pyramiden. Berechnung des Rauminhaltes von Cylindern und Kegeln. — § 46. Aufgaben. — § 47. Rauminhalt der Kugel. — § 48. Aufgaben. — § 49. Uebungen.	

Vierter Cursus.

Systematische Betrachtung einzelner Raumfiguren.

VIII. Abschnitt. Körperliche Ecken	76
§ 50. Construction der dreiseitigen Ecke aus ihren Seiten. — § 51. Möglichkeit der Construction in § 50. — § 52. Trigonometrische Beziehungen. — § 53. Sätze über die Seiten und Winkel der dreiseitigen Ecke. — § 54. Congruenz dreiseitiger Ecken. Erster Congruenzsatz. — § 55. Satz über die gleichschenklige Ecke. — § 56. Die symmetrisch vierseitige Ecke. — § 57. Construction der Ecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Zweiter Congruenzsatz. — § 58. Die Polarecke. — § 59. Construction der Ecke aus den Winkeln oder aus einer Seite und den anliegenden Winkeln. Dritter und vierter Congruenzsatz. — § 60. Trigonometrische Beziehungen. — § 61. Uebungen.	
IX. Abschnitt. Kegel, Kugel und regelmässige Ecken	90
§ 62. Der Rotationskegel. — § 63. Geometrische Oerter. — § 64. Regelmässige Ecken. — § 65. Die Kugel; Punkte und Tangentenebenen. — § 66. Tangenten der Kugel. — § 67. Geometrische Oerter. — § 68. Zwei Kugeln. — § 69. Kegelschnitte. — § 70. a) Vermischte Uebungen; b) Uebungen über Kartenprojection.	

Fünfter Cursus.

Sphärik.

	Seite
X. Abschnitt. Figuren auf der Kugelfläche	114

§ 71. Punkte und Hauptkreise der Kugel; Pol und Polare. — § 72. Sphärische Abstände und Winkel. — § 73. Das sphärische Dreieck. — § 74. Das Polardreieck. — § 75. Die Fläche und die Winkel des sphärischen Dreiecks. — § 76. Ungleichungen zwischen Seiten und Winkeln. — § 77. Das gleichschenklige Dreieck. — § 78. Das sphärische Deltoid. — § 79. Congruenz sphärischer Dreiecke. — § 80. Das sphärische Parallelogramm.

Verbesserungen.

§ 21, Zeile 3 lies: „sind im Allgemeinen ungleich“ statt „sind ungleich“.

Seite 76, Zeile 4 von unten lies: „senkrecht über D “ statt „senkrecht über C “.

§ 65, Ueberschrift lies: „Punkte und Tangentenebenen“ statt „Punkt- und Tangentenebenen“.

Seite 111, Zeile 2 von unten lies: „ $\frac{x}{\cos 20^\circ}$ “ statt „ $\frac{x}{\cos 30^\circ}$ “.

Erster Cursus.

I. Abschnitt.

Punkte, Ebenen und gerade Linien im Raume.

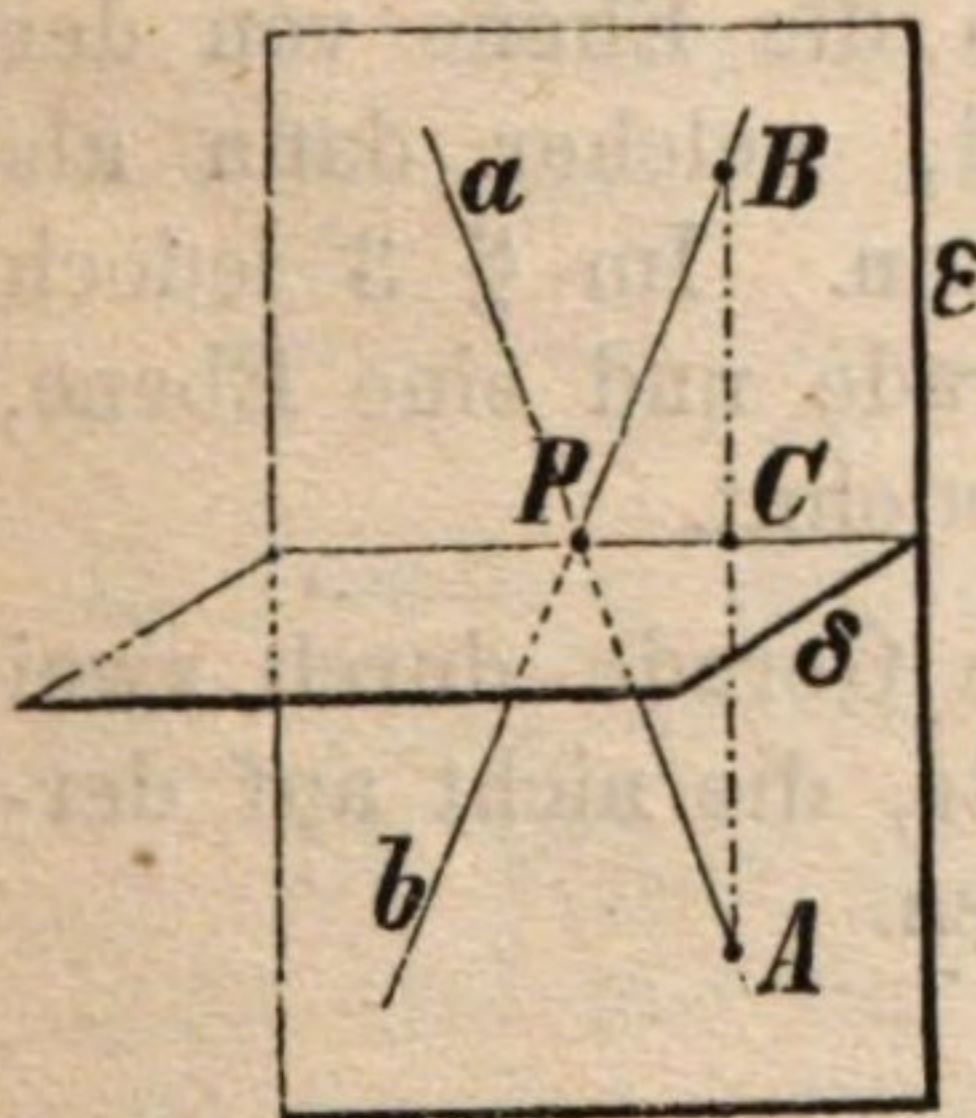
§ 1. Die Ebene.

a) Durch einen Punkt kann man unendlich viele Ebenen legen. Je zwei derselben haben eine Gerade gemeinsam.

α) Auf einer Ebene liegen unendlich viele Punkte. Die Gerade, welche zwei derselben verbindet, liegt ganz in der Ebene.

Dass die Gerade, welche zwei beliebige Punkte einer Ebene verbindet, ganz in der letzteren gelegen ist, nehme man als Grundsatz an. Alsdann kann bewiesen werden,

Fig. 1.



dass zwei Ebenen ϵ und δ in Fig. 1, welche durch denselben Punkt P gehen, eine Gerade gemein haben. Man ziehe auf ϵ durch den Punkt P zwei Geraden a und b . Jede dieser Geraden reicht in die beiden Räume, welche durch die Ebene δ von einander getrennt sind. Man kann demnach auf verschiedenen Seiten von δ zwei Punkte A und B so annehmen, dass der erste auf der Geraden a , der zweite auf b gelegen ist. Die Gerade AB muss nun die Ebene δ in einem von P verschiedenen Punkte C treffen. C ist beiden Ebenen gemeinsam und dasselbe gilt nach α) von der Geraden PC .

Anmerkung. Die Ebene kann man sich auf verschiedene Weise entstanden denken, z. B. durch eine Gerade, welche durch einen Punkt geht und an einer andern Geraden hingeleitet. Es ist aber nicht gelungen aus einer solchen Entstehungsart die Eigenschaft, welche in α) ausgesprochen ist, auf einfache Weise abzuleiten.

§ 2. Der Strahlenbündel und das ebene System.

- | | |
|--|--|
| <p>a) Ein Punkt P mit allen Ebenen und Geraden, welche durch ihn gelegt werden können, wird ein Strahlenbündel genannt. P heisst der Scheitel (Centrum) des Bündels.</p> | <p>α) Eine Ebene ε mit allen Punkten und Geraden, welche auf ihr liegen können, wird ein ebenes System genannt. ε heisst der Träger des Systems.</p> |
| <p>b) Durch eine Gerade a kann man unendlich viele Ebenen legen. Die Gesamtheit derselben heisst ein Ebenenbüschel. a ist die Axe desselben.</p> | <p>β) Auf einer Geraden a liegen unendlich viele Punkte. Die Gesamtheit derselben heisst eine Punktreihe. a ist der Träger der Punktreihe.</p> |
| <p>c) Eine Gerade und ein Punkt ausserhalb derselben bestimmen eine Ebene.</p> | <p>γ) Eine Gerade und eine Ebene, welche diese Gerade nicht enthält, bestimmen einen Punkt.</p> |

Die in vorstehenden Sätzen enthaltenen Behauptungen denken wir aus der Anschauung entnommen. Zu γ) ist noch eine besondere Bemerkung nöthig:

Man beachte vorerst nur den Fall, wo die Ebene von der Geraden in einem Punkte geschnitten wird, welcher dann als durch beide bestimmt angesehen werden kann. Im § 3 jedoch wird die Geltung von γ) auch auf eine Gerade und eine Ebene, welche einander parallel sind (§ 4 a), ausgedehnt.

Anmerkung. Ersetzt man in c) die Gerade durch zwei ihrer Punkte, so sieht man, dass drei Punkte, die nicht auf derselben Geraden liegen, eine Ebene bestimmen.

§ 3. Lagen von geraden Linien gegen einander.

a) Zwei gerade Linien, welche sich schneiden, liegen in einer Ebene, welche auch durch eine dieser Geraden und einen beliebigen Punkt der andern bestimmt ist (vergl. § 2 c).

b) Zwei gerade Linien sind parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, soweit man sie auch verlängern mag. Zwei parallele Linien bestimmen also immer eine Ebene.

Die letzte Behauptung ist nur ein besonderer Fall von dem in a) Gesagten, wenn man zwei parallelen Linien einen unendlich fernen Punkt als gemeinsam zuschreibt (vergl. G. § 10 Anmerkung). Aus der Definition der Parallellinien und dem in der ebenen Geometrie ausgesprochenen Grundsatz (G. § 9) folgt, dass durch einen beliebigen Punkt des Raumes nur eine Parallele zu einer gegebenen Geraden gezogen werden kann.

c) Zwei Geraden, welche sich nicht schneiden und nicht parallel sind, liegen nicht in einer Ebene — Kreuzende Geraden.

§ 4. Lagen von Ebenen und geraden Linien gegen einander.

a) Eine Gerade a , welche mit einem Strahle s der Ebene α parallel ist, trifft diese Ebene nicht. Die Gerade a und die Ebene α heissen alsdann parallel.

Beweis. Ein gemeinsamer Punkt P von a und α (Fig. 2) müsste in der durch a und s gelegten Ebene β liegen, weil β

Fig. 2.

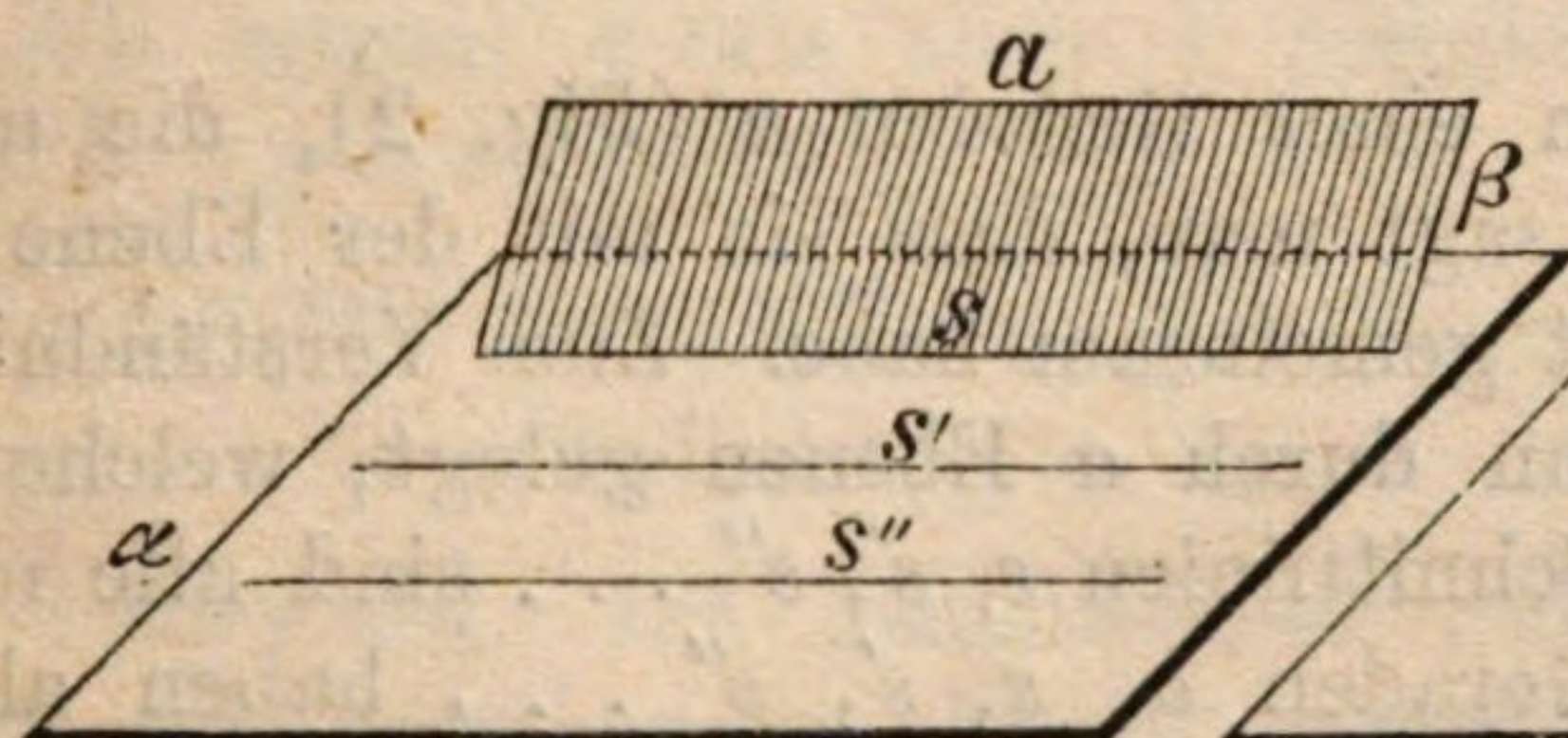
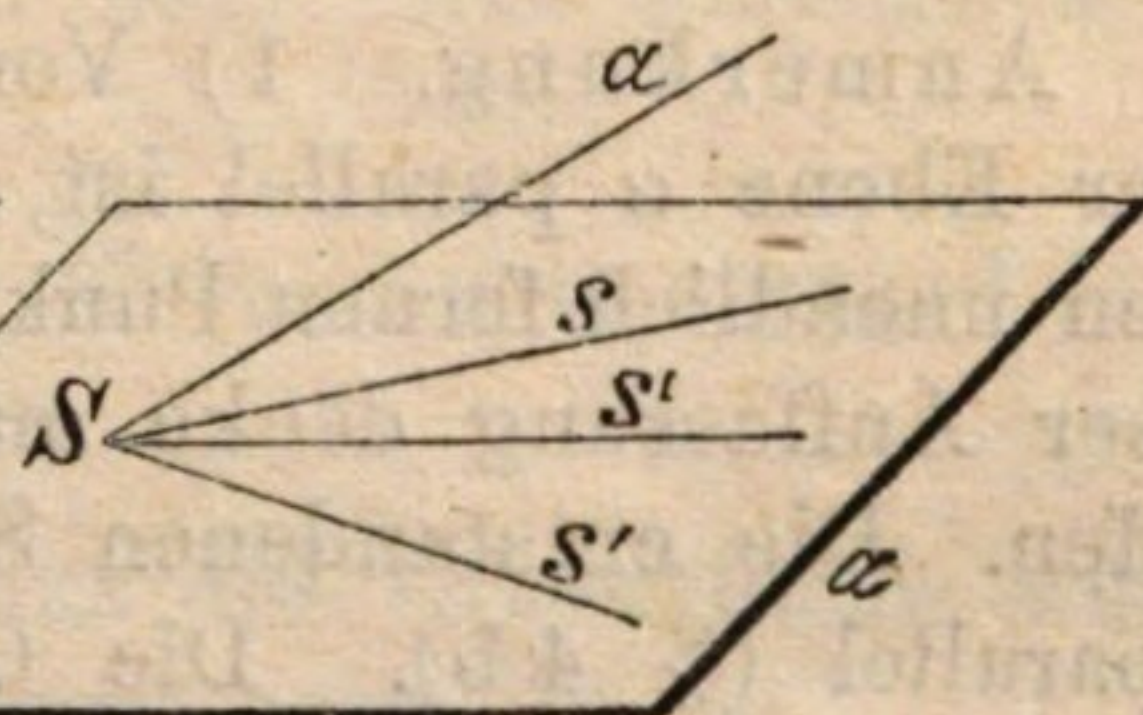


Fig. 3.



die Gerade a vollständig enthält. P müsste sonach auf s liegen, was unmöglich ist, da a und s sich nicht treffen.

b) Wenn eine Gerade in der einen von zwei Ebenen liegt und mit der andern Ebene parallel ist, so ist sie auch mit der Schnittlinie der Ebenen parallel.

Beweis. Wenn die Gerade a (Fig. 2) in der Ebene β liegt und mit der Ebene α parallel ist, so kann sie die Schnittlinie s beider Ebenen nicht treffen. Ein Schnittpunkt von a und s wäre nämlich zugleich ein gemeinsamer Punkt von a und α , welcher nach der Voraussetzung nicht existiren kann.

Abgeleitete Sätze.

c) Wenn eine Gerade a mit zwei Ebenen β und γ parallel ist, so ist sie auch mit der Schnittlinie d der Ebenen parallel.

Beweis. Man denke die Ebene δ gelegt, welche durch a und einen beliebigen Punkt P von d bestimmt ist.* δ muss mit jeder der Ebenen β und γ einen Strahl gemein haben. Beide Strahlen fallen in eine Gerade zusammen, weil sie durch P gehen und mit a parallel sind (§ 4 b), und diese Gerade stellt somit die Schnittlinie von β und γ dar.

d) Wenn von zwei parallelen Strahlen a und b der erste mit einer Ebene α parallel ist, so ist es auch der andere.

Beweis. Die durch a und b gelegte Ebene möge von α in der Geraden c getroffen werden.** Nach § 4 b ist a mit c parallel und der Parallelismus von b und c folgt aus einem Satze der ebenen Geometrie (G. § 10 α). Wenn aber der Strahl b mit c parallel ist, so wird er auch mit der durch c gelegten Ebene α parallel sein (§ 4 a).

e) Wenn zwei Geraden a und b mit einer dritten c parallel sind, so sind sie es auch unter sich.

Beweis. Jede beliebige durch a gelegte Ebene ist mit b parallel, weil sie mit c parallel ist (§ 4 d). Daraus folgt aber nach § 4 c der Parallelismus von a und b .

Anmerkung. 1) Von einer Geraden a (Fig. 2), die mit einer Ebene α parallel ist, sagt man, dass sie mit der Ebene α einen unendlich fernen Punkt gemeinsam habe. Zum Verständniss dieser Auffassung denke man durch a Ebenen gelegt, welche α treffen. Die entstandenen Schnittlinien $s, s', s'' \dots$ sind alle mit a parallel (§ 4 b). Die Geraden $a, s, s', s'' \dots$ haben also denselben unendlich fernen Punkt gemeinsam (G. § 10 Anm.), welcher den gemeinsamen Punkt der Geraden a und der Ebene α darstellt. Dass man die Geraden a, s, s', s'' nach demselben unendlich fernen Punkte gerichtet denkt, stimmt damit überein, dass nach § 4 e die Geraden s, s', s'' unter sich parallel sind.

2) Die Betrachtung der Figuren 2 und 3 erläutert folgenden Satz: „Ein Ebenenbüschel wird von einer ihm nicht angehörigen Ebene α in einem Strahlenbüschel geschnitten. Die Axe a des Ebenenbüschels trifft die Ebene α in dem Scheitel S “

* Bei den folgenden Beweisen stütze man sich auf die geistige Vorstellung der beschriebenen Raumfiguren. Erst wenn dies nicht gelingt, komme man mit einer selbst gezeichneten Figur zu Hülfe.

** Sollten die Ebenen α und (ab) sich nicht treffen, so könnte auch b von α nicht getroffen werden, womit sich auch in diesem Falle die Behauptung erweist. Die Möglichkeit von Ebenen, welche sich nicht schneiden, wird in § 5 behandelt.

des Strahlenbüschels. Wenn die Axe a mit der Ebene α parallel ist, so fällt der Scheitel S in den unendlichen Raum der Ebene α , das heisst die Strahlen des Büschels sind unter sich und mit der Axe parallel. In dem betrachteten Satze sieht man ein Beispiel der allgemeinen Regel, dass durch die Betrachtung des unendlich fernen Punktes die Sätze über Geraden, die unter sich oder mit Ebenen parallel sind, als specielle Fälle derjenigen Sätze erscheinen, in welchen jene Linien unter sich oder mit genannten Ebenen einen Schnittpunkt gemein haben. Dabei kommen aber nur diejenigen Sätze in Betracht, welche sich wie der vorher erwähnte, nur auf allgemeine Lagenverhältnisse und nicht auf Längen oder Flächenmasse beziehen.

§ 5. Parallele Ebenen.

a) Zwei Ebenen treffen sich nicht (man sagt alsdann, die Ebenen seien parallel), wenn zwei convergente Geraden (a und b) der einen mit der andern parallel sind.

Beweis. Mit einer Schnittlinie beider Ebenen müsste nach § 4 b sowohl a als auch b parallel sein, was unmöglich ist (G. § 9, Grundsatz).

b) Die Schnittlinien paralleler Ebenen mit einer dritten Ebene sind parallel.

Beweis. Ein gemeinsamer Punkt der Schnittlinien würde auch ein gemeinsamer Punkt der Ebenen sein.

c) Durch einen Punkt P ausserhalb der Ebene α lässt sich nur eine zu α parallele Ebene β legen.

Beweis. Man nehme an, dass durch P zwei zu α parallele Ebenen β und γ gelegt werden könnten. Alsdann lege man durch P noch eine dritte Ebene, welche α , β und γ in drei Geraden a , b , c schneidet. Die durch P gehenden Geraden b und c müssten nun beide mit α parallel sein (Satz b), was unmöglich ist (G. § 9, Grundsatz).

Anmerkung. Eine Gerade g der Ebene α und der ausserhalb α gelegene Punkt P bestimmen eine Ebene β . Wenn die Gerade g auf α in unendliche Ferne gerückt wird, so wird die hiedurch auch in Bewegung gesetzte Ebene sich mit der Ebene α parallel stellen müssen, denn jeder Strahl von β wird mit α parallel werden, weil er zuletzt mit dieser Ebene nur einen unendlich fernen Punkt (der unendlich fernen Schnittlinie) gemein

hat. Da durch P nur eine zu α parallele Ebene geht, so muss die gleiche Lage von β erhalten werden, nach welcher Richtung auch man die Gerade g hinausrücken mag. Man ist daher genöthigt, jeder Ebene nur eine einzige unendlich ferne Gerade zuzuschreiben, in welcher alle unendlich fernen Punkte der Ebene liegen.

d) Wenn die erste von zwei parallelen Ebenen α und β durch eine dritte γ geschnitten wird, so wird es auch die andere.

Beweis. Wenn γ mit β parallel wäre, so gingen durch einen gemeinsamen Punkt von α und γ zwei Ebenen, die mit β parallel sind, und man befände sich im Widerspruche mit dem Satze c.

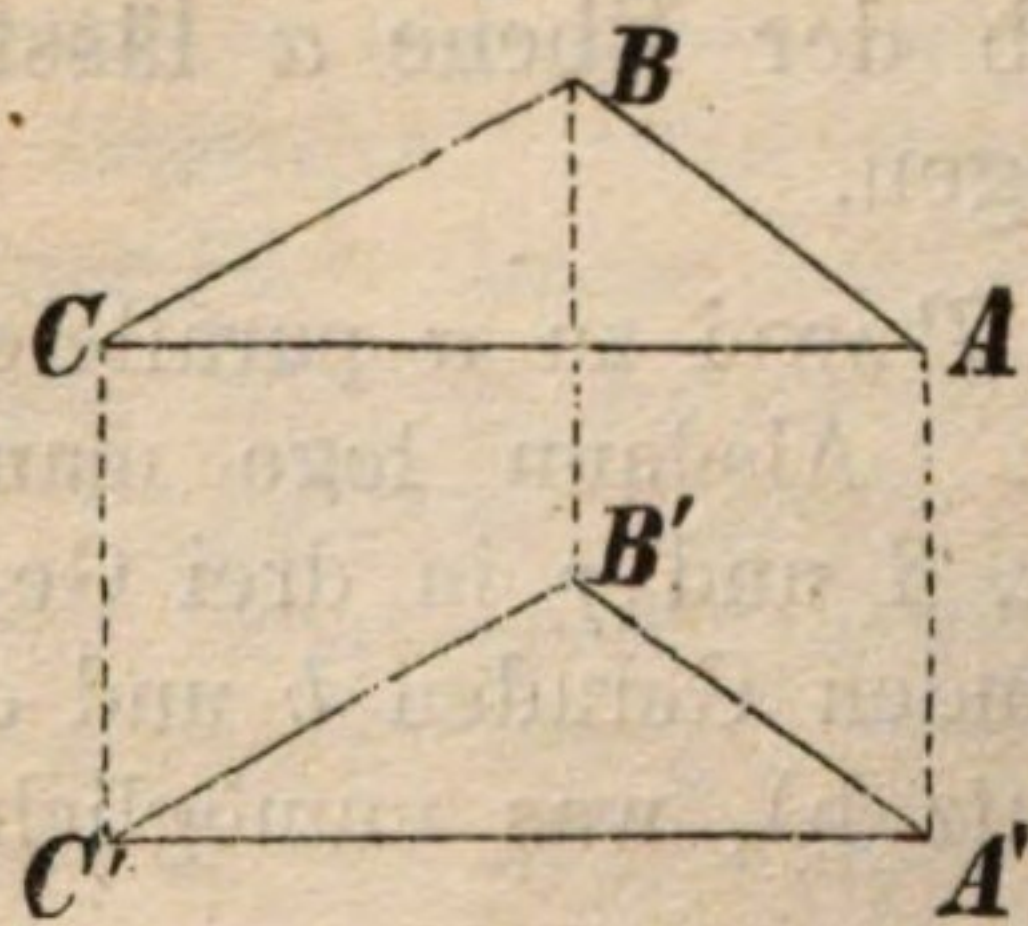
e) Wenn zwei Ebenen α und β mit einer dritten Ebene γ parallel sind, so sind sie unter sich parallel.

Beweis. Wenn α und β einen Punkt P gemein hätten, so gingen durch denselben zwei zu γ parallele Ebenen, was unmöglich ist.

f) Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweise in gleicher Richtung parallel laufen, so sind diese Winkel gleich und ihre Träger sind parallel (oder fallen zusammen).

Beweis. Trage von den Scheiteln A und A' (Fig. 4) aus auf zwei parallelen Schenkeln die gleichen Längen AB und $A'B'$, auf den übrigen Schenkeln die ebenfalls gleichen Längen AC und $A'C'$ ab. $ABB'A'$ und $ACC'A'$ sind alsdann Parallelogramme (G. § 25 β). Da, wie hieraus folgt, AA' mit BB' und CC' gleich und parallel ist, so sind auch BB' und CC' unter sich gleich und parallel und $BCC'B'$ ist ebenfalls ein Parallelogramm. Man schliesse hieraus auf die Gleichheit von BC und $B'C'$ und nun lässt sich die Congruenz der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Gleichheit der entsprechenden Seiten) und die Gleichheit der gegebenen Winkel folgern. Der Parallelismus der Träger beider Winkel folgt aus § 5 a.

Fig. 4.



Auch die Umkehrung des Satzes f) ist richtig:

g) Wenn gleich grosse Winkel BAC und $B'A'C'$ (Fig. 4) von demselben Sinne in parallelen Ebenen liegen und ihre

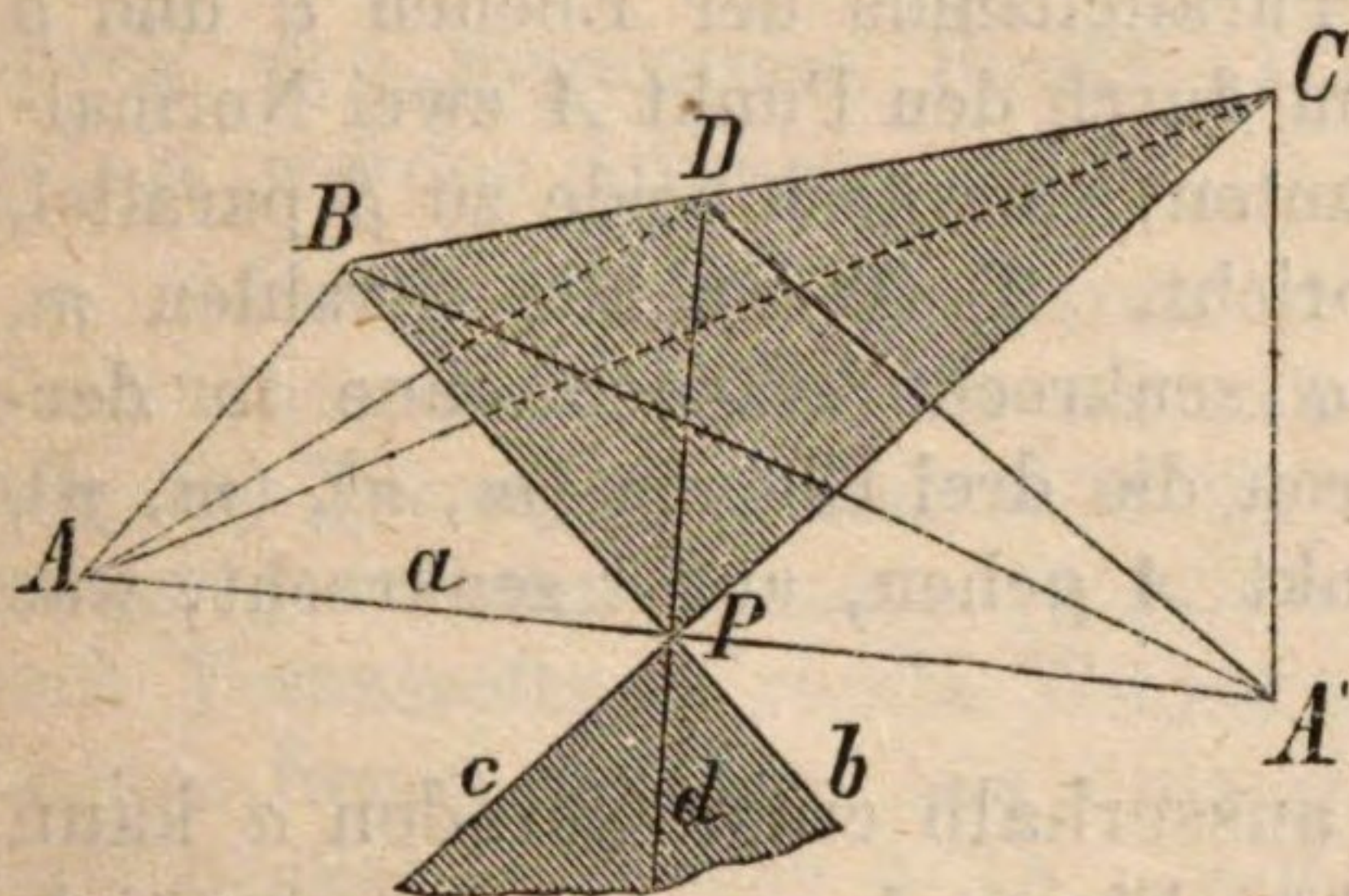
Anfangsschenkel AB und $A'B'$ parallel sind, so gilt dasselbe von ihren Endschenkeln AC und $A'C'$.

Zum Beweise denke man durch A' eine Parallele $A'M$ zu AC gezogen. Aus der Voraussetzung und Satz f) folgt alsdann die Gleichheit der Winkel $B'A'C'$ und $B'A'M$ und das Zusammenfallen der Schenkel $A'C'$ und $A'M$.

§. 6. Ebenen und Geraden in normaler Lage.

a) Wenn zwei Strahlen c und b (in Fig. 5) eines Strahlenbüschels auf einer Geraden a senkrecht stehen, so ist dasselbe

Fig. 5.



mit allen andern Strahlen des Büschels der Fall. Man sagt alsdann, die Ebene des Büschels und die Gerade a stehen auf einander senkrecht (normal).

Beweis. A und A' seien zwei Punkte der Geraden a , welche von dem Scheitel P des Büschels gleichweit abstehen. Die Strecke AA' wird alsdann von den Strahlen c und b senkrecht halbiert. Ein dritter Strahl d des Büschels, den wir innerhalb des Winkels CPB annehmen, wird von der Geraden BC in einem Punkte D geschnitten. Da nach G. § 23a: $BA = BA'$ und $CA = CA'$, so folgt die Congruenz der Dreiecke ABC und $A'BC$ aus Gleichheit der drei Seiten. Wenn aber diese Dreiecke zur Deckung gebracht werden (durch Drehung um BC), so decken sich auch die Strecken DA und DA' , aus deren Gleichheit gefolgert wird, dass DP auf AA' senkrecht steht (G. § 23a). Auf dieselbe Weise zeigt man, dass auch jeder andere Strahl des Büschels auf a senkrecht steht.

Anmerkung. g und h seien zwei Geraden des Raumes, welche keinen Punkt gemein haben. Wenn durch einen Punkt P zwei Geraden bezüglich mit g und h parallel gezogen werden, so entsteht immer derselbe Winkel, wo auch der Punkt P angenommen sein mag (§ 5f). Dieser Winkel wird auch als Winkel der Geraden g und h angesehen. In Bezug hierauf kann man den Satz a erweitern:

a) Wenn eine Gerade auf zwei Strahlen einer Ebene senkrecht steht (das heisst, wenn sie mit ihnen rechte

Winkel bestimmt), so steht sie auf jedem Strahle der Ebene senkrecht.

b) 1) Zwei zu derselben Geraden a normale Ebenen sind parallel. 2) Durch einen Punkt A der Geraden a kann man nur eine einzige Normalebene α legen: 3) dieselbe enthält alle Strahlen, welche durch den Punkt A gehen und zur Geraden a normal sind.

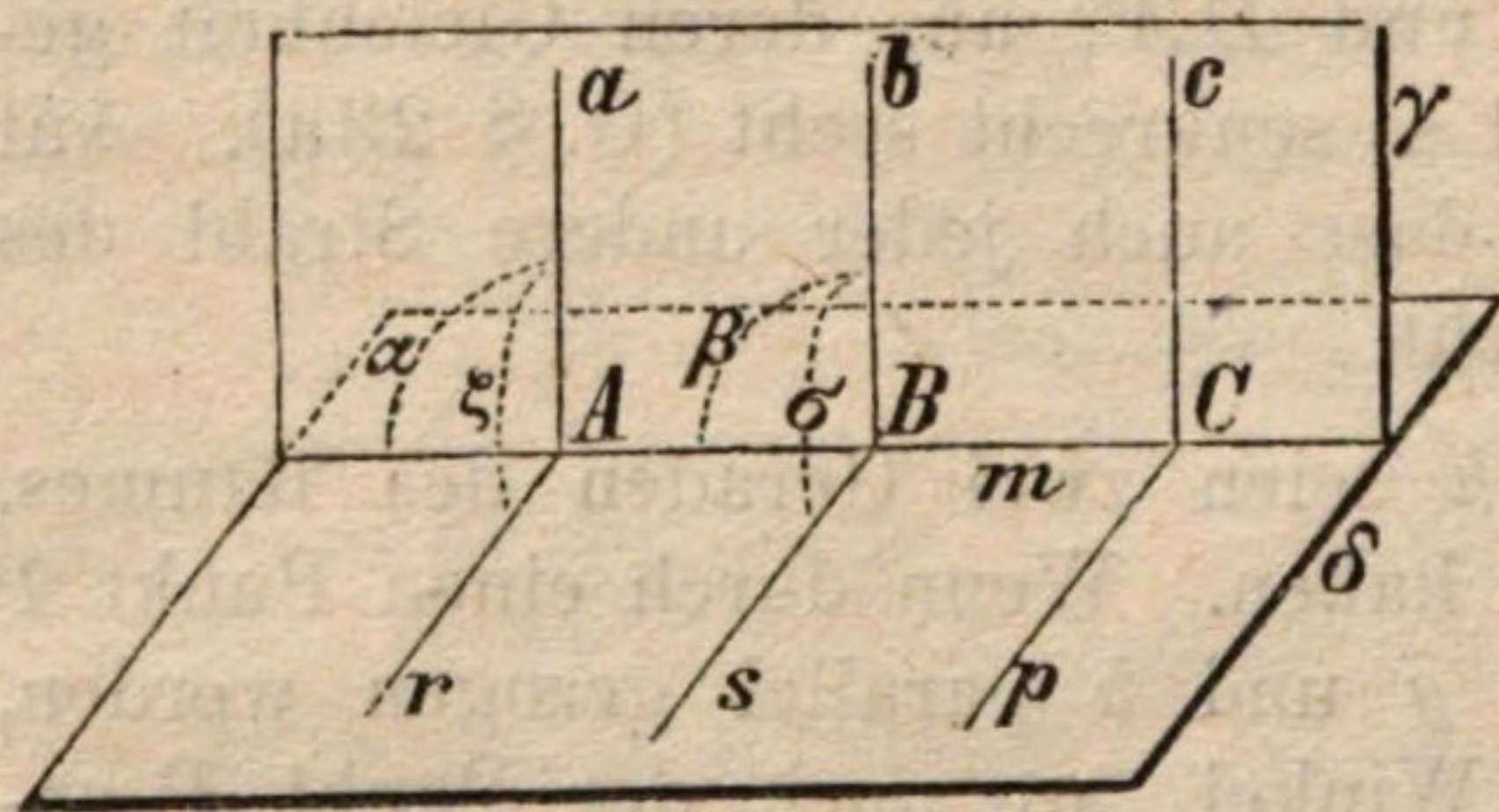
Beweis. 1) Durch die Punkte A und B der Geraden a seien die Normalebenen α und β gelegt. Man denke sich a als Axe eines Ebenenbüschels. Jede Ebene des Büschels schneidet α und β in zwei Strahlen, welche parallel sind, weil sie beide auf a senkrecht stehen. Der Parallelismus der Ebenen α und β folgt daher aus § 5f. 2) Wenn durch den Punkt A zwei Normalebenen zu a gelegt werden könnten, so wären beide zu β parallel, was dem Satze § 5c widerspricht. 3) Wenn die Strahlen m , n , p in A auf der Geraden a senkrecht ständen ohne in derselben Ebene zu liegen, so wären die drei Ebenen (m, n) , (m, p) , (n, p) , welche durch den Punkt A gehen, auf a senkrecht, was unmöglich ist.

c) Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden a kann man nur eine zu a senkrechte Ebene legen. Sonst befände man sich im Widerspruche mit § 6b,1.

§ 7. Fortsetzung.

a) Wenn ein Strahl a (Fig. 6) eines Parallelstrahlenbüschels auf einer Ebene δ senkrecht steht, so ist dasselbe für jeden andern Strahl b des Büschels der Fall. Man sagt alsdann der Träger γ des Büschels stehe auf δ senkrecht.

Fig. 6.



Beweis. m sei die Schnittlinie der Ebene δ mit dem Träger γ des Büschels. Die Winkel α und β sind als correspondirende Winkel gleich, folglich ist β recht, weil α nach Voraussetzung recht ist. Zieht man nun in δ durch die Punkte A und B zwei Parallelen r und s , so sind die Winkel ϱ und σ nach § 5f gleich und σ ist recht, weil dasselbe nach Voraussetzung von ϱ gilt. Demnach steht b auf

den beiden Strahlen m und s von δ senkrecht, woraus nach § 6a die Behauptung folgt.

Anmerkung. Wenn die Gerade r in Fig. 6 senkrecht zu m gezogen ist, so steht sie nach § 6a auf γ senkrecht und bestimmt in der Ebene δ ein Parallelstrahlenbüschel, dessen Strahlen nach § 7a alle auf γ normal sind. Man erkennt daraus, dass nach der Definition in § 7a jede der beiden Ebenen γ und δ auf der andern senkrecht steht.

b) 1) Zwei Geraden, a und b (Fig. 6), welche auf derselben Ebene δ senkrecht stehen, sind parallel. 2) In einem Punkte A einer Ebene δ kann man nur eine einzige Normale errichten: 3) dieselbe liegt in allen Ebenen, welche durch den gegebenen Punkt A senkrecht auf die Ebene δ gelegt werden können.

Beweis. Man lege durch A und B Ebenen normal zur Verbindungsleine AB oder m . Diese Ebenen enthalten bezüglich die Normalen a und b (§ 6b) und schneiden die Ebene δ in den parallelen Geraden (§ 5b) r und s . Man hat dann zwei nach Voraussetzung rechte Winkel φ und σ , welche in parallelen Ebenen liegen und parallele Anfangsschenkel r und s haben. Die Endschenkel sind nach § 5g parallel. 2) Wenn in A zwei Normalen errichtet werden könnten, so müssten beide zu der Normale b parallel sein, was unmöglich ist. 3) Jede durch A gelegte Ebene ε , welche zu δ normal ist, enthält einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Strahlen auf δ senkrecht stehen. Derjenige Strahl dieses Büschels, welcher durch A geht, ist die errichtete Normale a , welche somit in der Ebene ε gelegen ist.

§ 8. Senkrechte Abstände und Neigungswinkel.

a) Von einem Punkt M (Fig. 7) ausserhalb einer Ebene

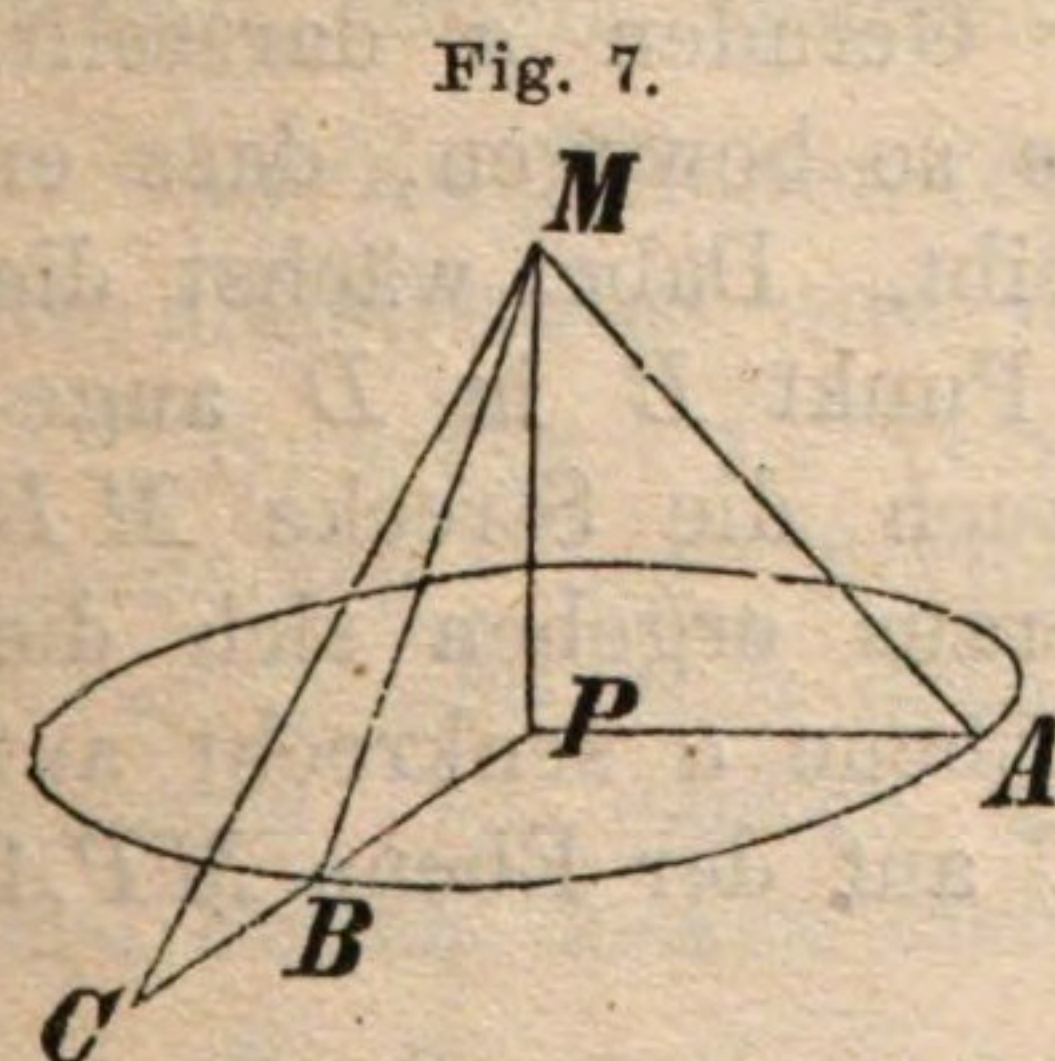


Fig. 7.

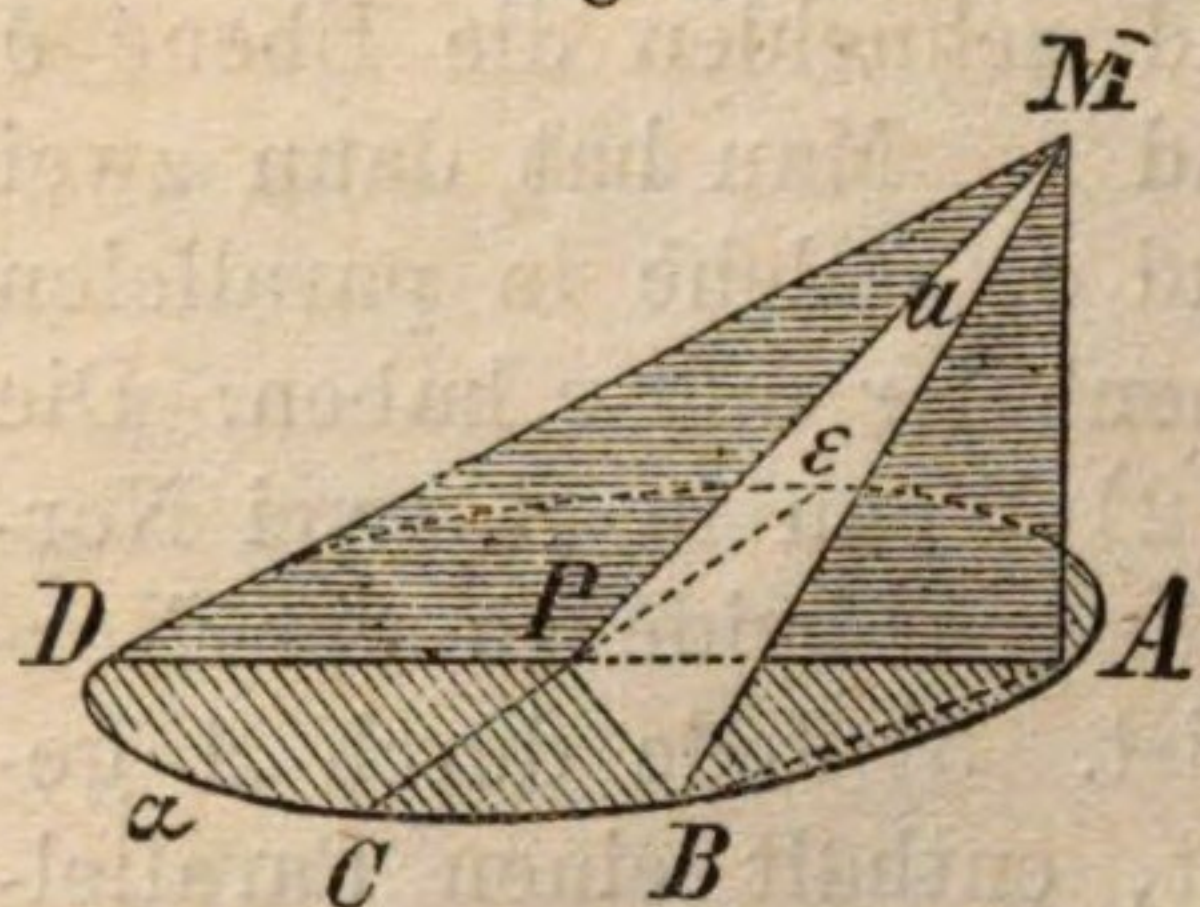
kann man nur eine Senkrechte auf dieselbe fallen. Auf derselben liegt die kleinste Strecke, die man von M nach der Ebene ziehen kann. 2) Zwei schiefe Strecken MA und MB sind gleich, wenn ihre Endpunkte A und B von dem Fusspunkte P der Senkrechten gleichen Abstand haben. 3) Von zwei schiefen Strecken MA und MC ist diejenige MC die grössere, deren Endpunkt C von jenem Fusspunkte am weitesten entfernt ist.

Beweis. Wenn durch M zwei Senkrechte auf die Ebene gezogen werden könnten, so befände man sich im Widerspruche mit § 7b, 1. Dass $MA > MP$ folgt aus G. § 20b, 1. Wenn $AP = BP$, so sind die Dreiecke AMP und BMP wegen der Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels congruent; woraus die Gleichheit von MA und MB folgt. Wenn $PC > PA$, so mache man auf PC die Strecke PB gleich PA . Aus G. § 20b, 3 folgt $MC > MB$, und hieraus $MC > MA$.

Anmerkung. P heisst die Normalprojection des Punktes M auf die Ebene und die Strecke MP wird als Entfernung des Punktes und der Ebene bezeichnet.

b) Eine Gerade a (Fig. 8) bestimmt mit einer Ebene α einen Strahlenbüschel (§ 4, Anmerkung 2). Unter den Winkeln, welche a mit den Strahlen des Büschels bildet, befindet sich im Allgemeinen ein kleinster (Ausnahmefälle sind § 4a und

Fig. 8.



§ 6a) MPA , welcher Neigungswinkel von a und α genannt wird und in der zu α normalen Ebene des Ebenenbüschels PM gelegen ist. Sein auf α befindlicher Schenkel PA heisst die Normalprojection der Geraden a auf die Ebene α . Der Nebenwinkel MPD des Neigungswinkels ist der grösste der in Rede stehenden Winkel, unter welchen sich auch zwei rechte Winkel MPC und MPE befinden, deren Schenkel PC und PE auf der Normalprojection PA senkrecht stehen.

Beweis. M sei ein Punkt der Geraden a , A sei die Normalprojection von M , so dass die Ebene MPA auf α senkrecht steht und PA die Normalprojection der Geraden a darstellt. Man lasse einen Punkt B sich von A aus so bewegen, dass er in der Ebene α einen Kreis um P beschreibt. Dabei wächst die Sehne AB von Null beginnend bis der Punkt B in D angekommen ist. In Folge dessen wächst auch die Strecke MB (§ 8a, 3) und der Winkel MPB .* Hieraus ergeben sich die ersten Behauptungen. Wenn PC in der Ebene α senkrecht auf PA gezogen ist, so steht dieser Strahl PC auf der Ebene MPA

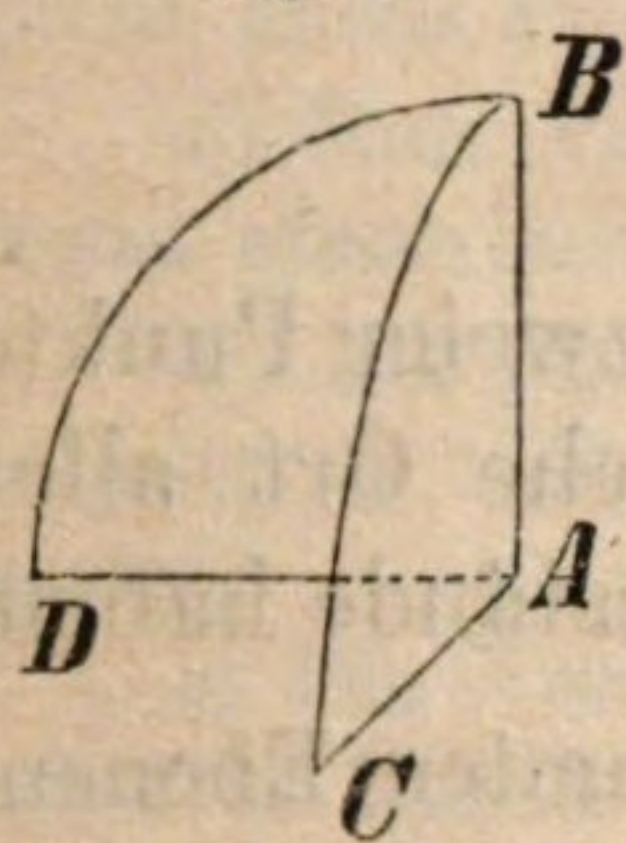
* Wenn in einem Dreieck eine Seite wächst, während die übrigen Seiten unverändert bleiben, so wächst auch der Gegenwinkel der ersten Seite.

senkrecht, weil er sowohl mit PA als auch mit AM rechte Winkel bestimmt. Daher ist der Winkel MPC ebenfalls recht.

§ 9. Keilwinkel und Normalschnitte derselben.

a) Zwei Ebenen, welche sich schneiden, theilen den Raum in 4 Räume, welche Flächenwinkel oder Keilwinkel genannt werden. Jeder der Keilwinkel wird

Fig. 9.



von den benachbarten durch die beiden „Seiten“ des Winkels getrennt, welche in seiner „Kante“ zusammentreffen.

Der Flächenwinkel in Fig. 9 wird mit $\overline{CABD}$ oder $\overline{DABC}$ bezeichnet.

Anmerkung. Beide Schreibweisen werden nur unterschieden, wenn man den Sinn der Winkel in Betracht zieht. Wie bei ebenen Winkeln kommt es alsdann auf den Sinn der Drehung an, welche von einer Seite (Anfangsseite) des Winkels gemacht werden muss, damit dieselbe in die Lage der „Endseite“ komme. Vergleiche G. § 3, Anm.

b) Der Schnitt eines Keilwinkels mit einer auf der Kante senkrechten Ebene heisst Normalschnitt oder Neigungswinkel der beiden ebenen Flächen, welche als Seiten des Keilwinkels erscheinen. Alle Normalschnitte desselben Winkels sind nach § 5f gleich. Wenn der Neigungswinkel CAD 90° beträgt, so steht ein Schenkel AC des Normalschnittes auf zwei Geraden AB und AD der Ebene BAD senkrecht; dann sind die Seiten des Keilwinkels nach § 7a zwei Ebenen, welche senkrecht auf einander stehen. Ebenso leicht beweist man umgekehrt, dass Ebenen, welche normal zu einander stehen, einen Neigungswinkel von 90° haben.

c) Zu gleichen (congruenten) Keilwinkeln gehören gleiche Normalschnitte und umgekehrt.

Beweis. 1) Vereint man die congruenten Keilwinkel, so erscheinen ihre Normalschnitte als Normalschnitte desselben Winkels und sind deshalb gleich. 2) Vereint man die Normalschnitte, so decken sich die Kanten beider Winkel und auch ihre Seiten decken sich paarweise.

d) Zwei Keilwinkel verhalten sich wie die zugehörigen Normalschnitte. Die Normalschnitte werden als Mass für Keilwinkel benützt.

Man beweise dies aus § 9c genau nach der Schlussweise von G. § 63a.

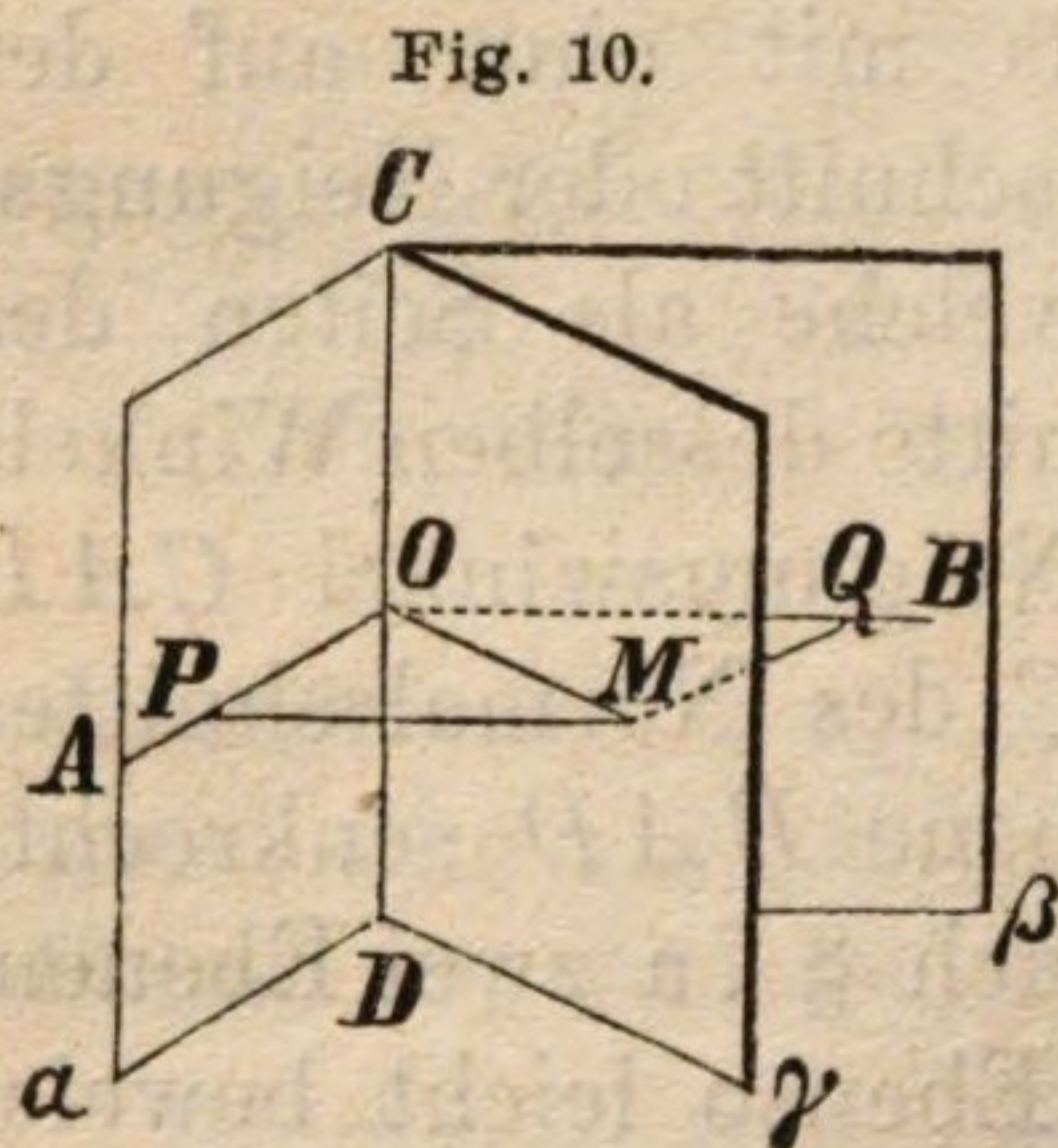
Anmerkung. Keilwinkel heissen spitz, stumpf, supplementär, complementär, Nebenwinkel, Scheitelwinkel, correspondirende Winkel u. s. w., wenn ihren Normalschnitten diese Bezeichnungen zukommen. Die entsprechenden Sätze der Stereometrie werden durch ihre Gültigkeit für die Normalschnitte bewiesen.

§ 10. Zwei geometrische Oerter.

a) Diejenige Ebene γ , welche den Abstand zweier Punkte A und B senkrecht halbt, ist der geometrische Ort aller Punkte M , welche von beiden Punkten gleiche Abstände haben.

Beweis. In jeder Ebene des von AB bestimmten Ebenenbüschels ist der geometrische Ort der Punkte M durch die Mittelsenkrechte von AB bestimmt. Alle diese Mittelsenkrechten bilden die in der Mitte von AB senkrecht stehende Ebene (§ 6b, 3).

b) Diejenige Ebene γ , welche den Keilwinkel zweier Ebenen halbt, ist der geometrische Ort aller Punkte innerhalb des Keilwinkels welche von beiden Ebenen gleiche Abstände haben.



Beweis. Die Entfernungen MP und MQ (Fig. 10) eines Punktes bestimmen eine zu CD senkrechte Ebene und stellen in derselben die Entfernungen des Punktes M von den Schenkeln OA , OB des Normalschnitts dar. In jeder zu CD senkrechten Ebene wird

also der geometrische Ort aus der Halbierungslinie des Normalschnitts bestehen. Die Gesamtheit dieser Halbierungslinien bildet aber die Ebene γ .

§ 11. Uebungen.

1) Die Sätze a) und α) des § 1 begründen eine duale Beziehung zwischen der Ebene und dem Punkte im Raum, so, dass der Verbindungslinie zweier Punkte die Schnittlinie zweier Ebenen zugeordnet ist. Im Folgenden sind Figuren, Aufgaben und Sätze angegeben. Man soll jedesmal das duale Gegenstück nennen.

α) Drei Punkte, die durch sie bestimmte Ebene und die Verbindungslinien der Punkte zu je zweien.

β) Drei Schnittlinien einer Ebene α mit drei andern Ebenen. Die Schnittpunkte dieser Geraden.

γ) Ein vollständiges Viereck und seine Nebenecken.

δ) Ein vollständiges Vierseit und seine Diagonalen.

ϵ) Eine Reihe von Punkten $a, b, c \dots$, von denen nie drei auf einer Geraden und nie vier auf einer Ebene liegen. Die Verbindungslinien eines jeden Punktes mit dem folgenden. Die Ebenen, welche durch je drei auf einander folgende Punkte gehen.

ζ) Diejenigen Strahlen, welche zugleich in einer Ebene liegen und durch einen Punkt gehen.

η) Eine Punktreihe und die Verbindungslinien ihrer Punkte mit einem ausserhalb liegenden Punkte.

θ) Die Ebenen, welche durch eine Gerade a und die Punkte einer Geraden b bestimmt sind (wenn a und b nicht in derselben Ebene liegen).

ι) Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier congruenter Punktreihen, deren Träger keinen Punkt gemein haben (kreuzende Geraden).

κ) Zwei Geraden a und b , welche nicht in einer Ebene liegen (kreuzende Geraden) und ein Punkt C ausserhalb dieser Geraden sollen gegeben sein. Man bestimme diejenige Gerade, welche durch C geht und die Geraden a, b schneidet.

λ) Drei Geraden a, b, c , von denen nie zwei in einer Ebene liegen, seien gegeben. Man bestimme Geraden, welche a, b, c schneiden. Diese Aufgabe ist von der dualistisch zugeordneten nur in der Form verschieden.

Andeutungen. α) Drei Ebenen, die durch sie bestimmte Punkt und die Schnittlinien der Ebenen zu je zweien. γ) Vier Ebenen die durch einen Punkt gehen. Ihre sechs Schnittlinien zu je zweien. Drei weitere (Diagonal-)Ebenen, welche den drei Paaren gegenüberliegender Schnittlinien zugehören (vollständige vierseitige Ecke). δ) Vier Geraden, die durch einen Punkt gehen u. s. w. (vollständige vierkantige Ecke mit ihren drei Nebenkanten). ϵ) Eine Reihe von Ebenen, von denen nie drei durch eine Gerade gehen u. s. w. Beide Figuren sind identisch. Wenn die Punkte (Ebenen) unmittelbar auf einander folgen, so erhält man eine Raumcurve mit ihren Tangenten und Schmiegeebenen. ι) Die Schnittlinien der entsprechenden Ebenen zweier congruenter Ebenenbüschel. In beiden Fällen folgen die Linien unmittelbar auf einander wie die Punkte einer Curve. Sie erfüllen eine Fläche, welche Regelfläche genannt wird, weil gerade Linien auf ihr liegen. Ein Modell ist leicht herzustellen. κ) Zwei Geraden a und b , welche sich nicht treffen (auch nicht in einem unendlich fernen Punkte) und eine Ebene γ , welche weder a noch b enthält, sind gegeben. Man bestimme diejenige Gerade in γ , welche sowohl mit a als mit b in einer Ebene liegt (oder: welche a und b schneidet).

2) Die Aufgabe 1κ und die dualistisch zugeordnete Aufgabe zu lösen.

Andeutung. 1) Lege durch C und a eine Ebene und durch C und b eine andere. Beide Ebenen schneiden sich in der gesuchten

Geraden. 2) Die Ebene γ schneidet die Geraden a und b in den Punkten A und B . AB ist die gesuchte Gerade.

3) Die Aufgabe 11 zu lösen.

Andeutung. Durch jeden Punkt der Geraden c geht eine solche Gerade, oder: in jeder durch c gelegten Ebene befindet sich eine solche Gerade. Man wende also 2) an.

4) Beweise, dass von denjenigen Geraden $m, n, p \dots$, welche der Aufgabe 11 genügen, nie zwei in einer Ebene liegen.

Andeutung. Sonst müssten auch a, b, c in derselben Ebene liegen. Die Geraden $m, n, p \dots$ erfüllen eine Regelfläche. Drei dieser Geraden m, n, p bestimmen eine zweite Schaar von solchen Geraden, welche m, n, p schneiden. Zu dieser Schaar gehören auch a, b, c . Die neuere Geometrie beweist, dass jede Gerade der einen Schaar alle Geraden der andern Schaar schneidet, dass also beide Schaaren auf derselben Fläche liegen (einmantliges Hyperboloid).

5) Durch einen Punkt eine Parallele zu einer Ebene zu legen. (Beliebig viele Lösungen. — § 4a.)

6) In wie fern kann man sagen, dass eine Schaar paralleler Ebenen einem Ebenenbüschel angehöre?

7) Drei Ebenen bestimmen im Allgemeinen einen Punkt. Wann ist dieser Punkt unendlich fern?

Antw. Wenn die 3 Ebenen mit derselben Geraden parallel sind.

8) Durch eine Gerade eine Ebene parallel mit einer andern Geraden zu legen.

9) Eine Gerade so zu legen, dass sie zwei kreuzende Geraden a und b schneidet und mit einer gegebenen Richtung c parallel ist.

Andeutung. Lege durch a und b Ebenen, welche mit c parallel sind. (8). Ihre Schnittlinie ist die Lösung.

10) Gerade Linien zu ziehen, welche zwei Strahlen a und b schneiden und mit einer gegebenen Ebene γ parallel sind (Beliebig viele Lösungen.)

Andeutung. Jede zu γ parallele Ebene enthält eine solche Gerade (Regelfläche — Paraboloid).

11) Wenn jede von 3 Geraden die andere trifft, so liegen sie in einer Ebene oder gehen durch einen Punkt, oder beides zugleich.

12) Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit einer andern Ebene parallel ist (§ 5a und § 11, 5).

13) Durch einen Punkt der Geraden a soll eine Ebene β senkrecht zu a gelegt werden.

14) Die Ebene β ist auch senkrecht zu jeder durch a gelegten Ebene. Beweis?

15) Durch einen Punkt A der Ebene α soll eine andere Ebene β normal zu α gelegt werden. (Beliebig viele Lösungen.)

Andeutung. Ziehe durch A in α eine Gerade a und wende 13) und 14) an.

15a) Wenn zwei Ebenen α und β auf der Ebene γ senkrecht stehen, so gilt dasselbe von der Schnittlinie der Ebenen α und β .

16) Durch einen Punkt A der Ebene α soll eine Gerade normal zu α gelegt werden.

Andeutung. Verfahre nach 15) und ziehe durch A in der Ebene β eine Normale b zur Schnittlinie von α und β .

17 α) Durch einen Punkt A ausserhalb der Geraden α kann nur eine zu α senkrechte Ebene gelegt werden (§ 6b, 1).

β) Diese Ebene zu legen.

Andeutung zu β). Fälle von A einen Strahl AB senkrecht auf α . Errichte in B einen zweiten Strahl, welcher zu α normal ist. Beide Strahlen bestimmen die gesuchte Ebene.

18) Durch einen Punkt A ausserhalb der Ebene α eine zu α normale Ebene zu legen. (Beliebig viele Lösungen.)

Andeutung. Ziehe in α einen beliebigen Strahl α und wende 17) an. Zum Beweise vergleiche 13) und 14).

19) Durch einen Punkt A ausserhalb der Ebene α eine zu α normale Gerade zu legen.

Andeutung. Lege zuerst eine Ebene durch A , welche normal zu α ist. In ihr fälle von A eine Normale zur Schnittlinie beider Ebenen.

20) Von einem Punkte A auf einer Seite eines Keilwinkels fälle man eine Senkrechte AB auf die andere. Ferner ziehe man

α) von B eine Senkrechte auf die Kante des Winkels,

β) von A eine Senkrechte auf die Kante.

Alle drei Linien liegen in demselben Normalschnitt des Winkels. Beweis? (Zusatz zu § 6a.)

21 α) Eine Gerade, welche auf der einen von 2 parallelen Ebenen senkrecht ist, ist es auch auf der andern.

β) Wenn man in der einen von 2 senkrechten Ebenen eine Normale auf die Schnittlinie zieht, so ist sie auf der andern Ebene senkrecht.

22) Wenn 2 Ebenen parallel sind, so haben alle Punkte der einen von der andern gleiche senkrechte Abstände (Abstand beider Ebenen).

23) Der Abstand zweier paralleler Ebenen ist die kleinste Strecke, welche man von der einen nach der andern ziehen kann (§ 8a).

24) Zwei Ebenen α und β sind parallel, wenn 3 Punkte C, D, E in α von β gleiche senkrechte Abstände haben (§ 5f).

25) Eine Ebene, welche auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, steht auch auf der andern senkrecht (§ 7b, 2 und 3, Aufgabe 21 und § 7a, oder auch mit Hilfe correspondirender Keilwinkel und der letzten Behauptungen in § 9b).

26) Es seien zwei kreuzende Geraden a und b gegeben. Wenn man durch a eine Ebene α parallel zu b und durch b eine Ebene β parallel zu a legt (Aufgabe 8), so sind α und β parallel. Beweis?

27) Eine Gerade senkrecht zu α und β in Aufgabe 26 so zu legen, dass sie a und b schneidet (Aufgabe 21).

Andeutung. Lege durch a eine Ebene γ senkrecht zu β und durch b eine Ebene δ senkrecht zu α . γ und δ schneiden sich in der gesuchten Geraden g .

28) Das Stück der in 27) construirten Geraden g , welches zwischen a und b fällt, ist die kürzeste Strecke, die man von der einen Geraden nach der andern ziehen kann. g steht auf a und b senkrecht.

Andeutung. Benütze für die erste Behauptung Aufgabe 22). Die zweite Behauptung folgt daraus, dass g auf α und β senkrecht steht.

29) Welches ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von drei gegebenen Punkten gleiche Abstände haben?

Andeutung. Wende § 10a zweimal an.

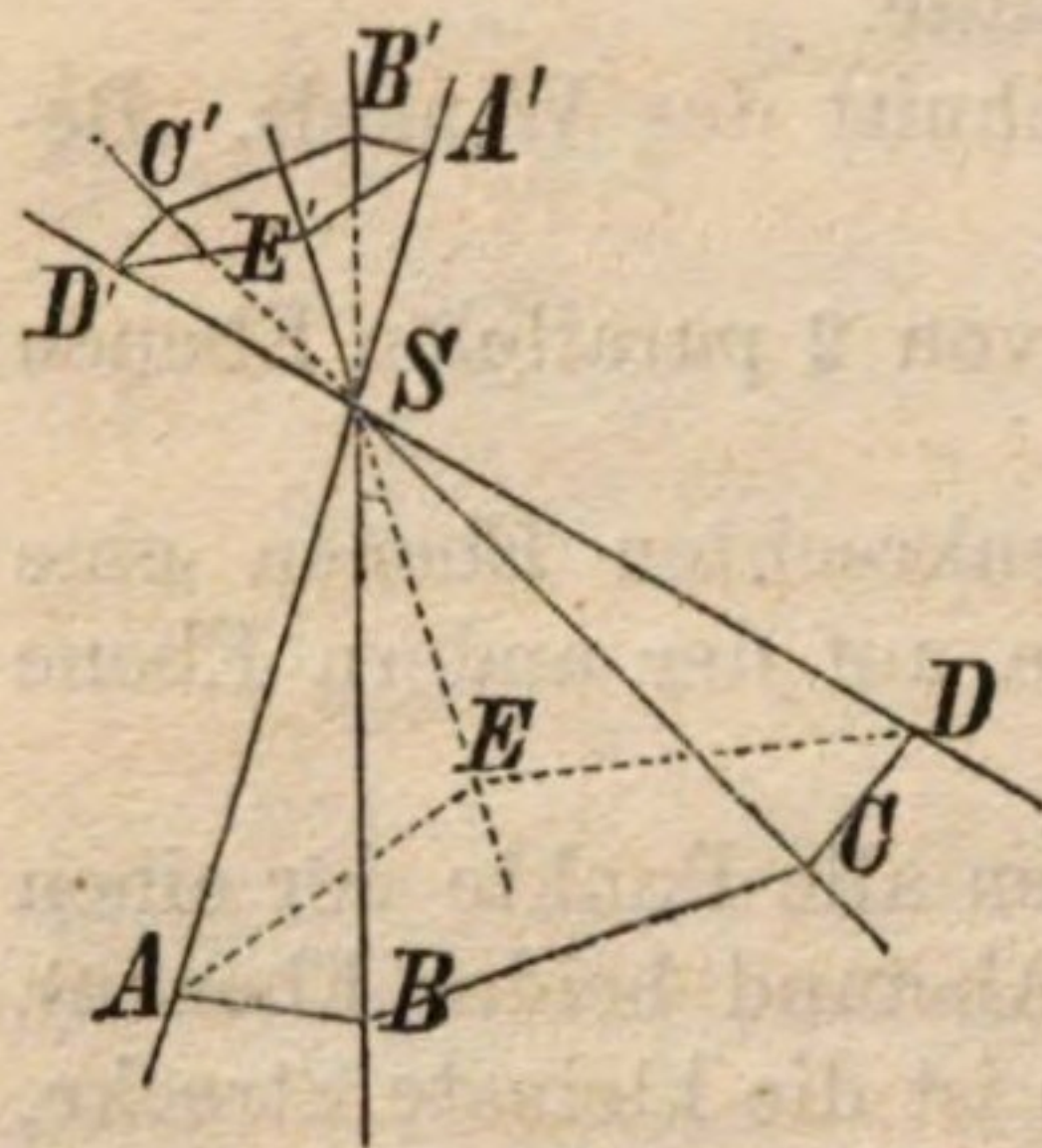
II. Abschnitt.

Entstehung von Raumfiguren.

§ 12. Körperliche Ecken, Prismen und Pyramiden.

a) Wenn ein Strahl eines Bündels S (Fig. 11) sich so bewegt, dass er an dem Umring eines ebenen n -Ecks ($ABCDE$) hingleitet, so entsteht eine körperliche Ecke $S(ABCDE)$

Fig. 11.



und ihre Gegenecke $S(A'B'C'D'E')$. Während der Strahl an einer Seite des Vielecks gleitet, beschreibt er ein Winkelfeld, welches „Seite“ der Ecke heisst. Die Strahlen, welche den „Scheitel“ S der Ecke mit den Eckpunkten des Vielecks verbinden, sind die Kanten der Ecke.* Zwei auf einander folgende Seiten der Ecke bilden einen Keilwinkel, welcher ein Winkel der „Ecke“ genannt wird. Die entstandene Ecke

ist n -seitig und n -kantig. Eine Ecke und ihre Gegenecke haben entsprechend gleiche Seiten und Winkel.

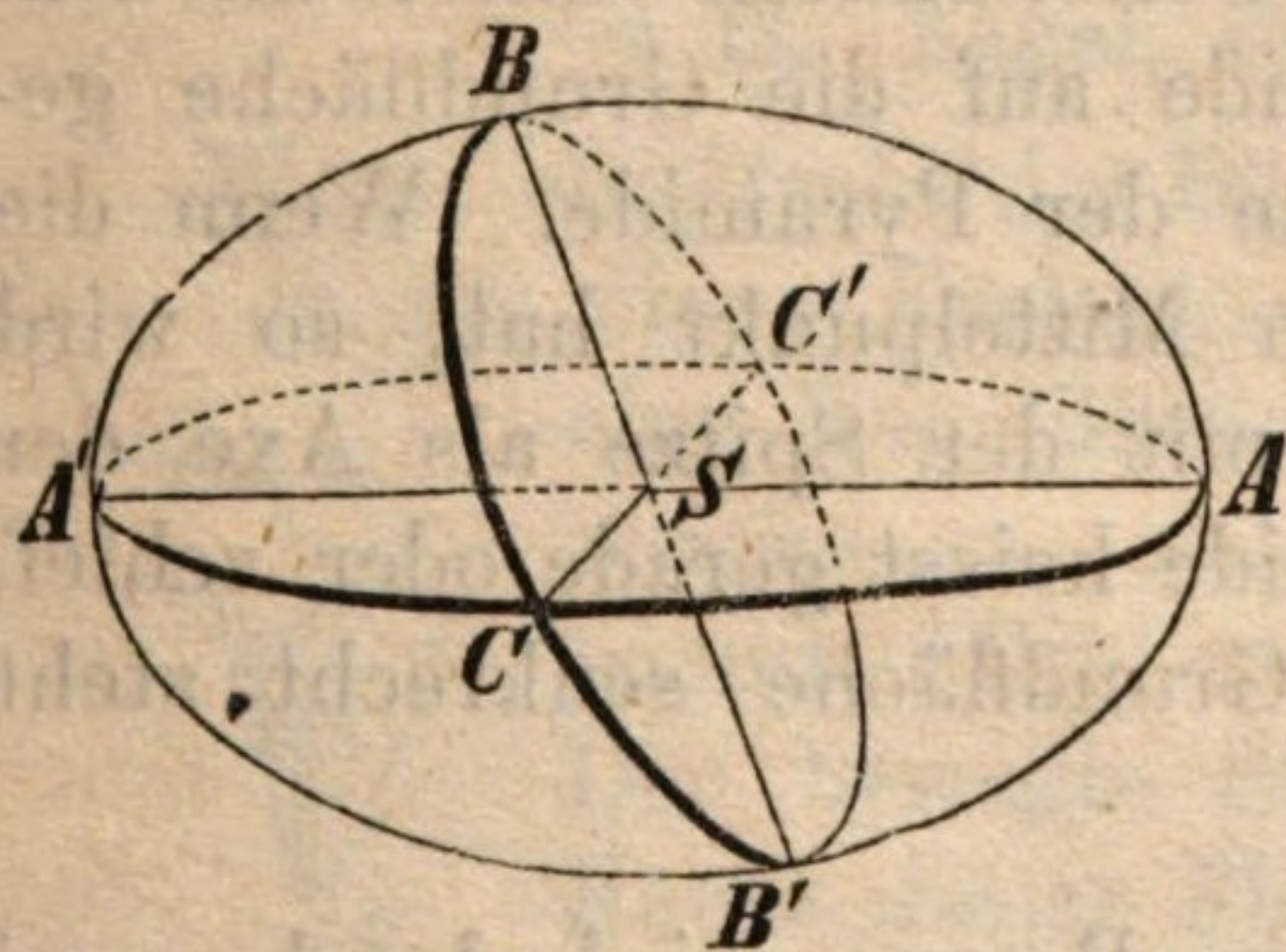
* Durch die beschriebene Entstehung erscheinen die Seiten und Ecken eines ebenen Vielecks bezüglich den Seiten und Kanten der körperlichen Ecke entsprechend. Diese Beziehung ist aber nicht diejenige der Dualität im Raum, bei welcher der Punkt einer Ebene und die Gerade wieder einer Geraden entspricht, sondern die Beziehung der „Projection“, welche im folgenden Abschnitte weiter behandelt wird. Man kann aber aus dieser Beziehung erkennen, dass die Dualität zwischen dem Punkt und der Geraden im ebenen System sich in dem Strahlenbüschel als Dualität zwischen Strahl und Ebene wiederfinden muss.

Beweis zu der letzten Behauptung in a): Je zwei entsprechende Seiten einer Ecke und ihrer Gegenecke sind gleich als Scheitelwinkel. Je zwei entsprechende Winkel beider Ecken sind durch denselben Keilwinkel gebildet.

Anmerkung. Man denke sich auf der Gegenecke ebenfalls den Umring eines Vielecks $A'B'C'D'E'$ gezogen. Wenn zwei Beobachter auf* den Ecken sich so bewegen, dass sie gleichzeitig in entsprechenden Eckpunkten der Vielecke ankommen, so hat der eine Beobachter den Scheitelpunkt S auf der rechten, der andere auf der linken Seite. Die beiden Ecken können daher nicht zum Zusammenfallen gebracht werden — sind nicht congruent —, obgleich sie alle Seiten und Winkel entsprechend gleich haben. Congruente Ecken sind immer von gleichem Sinne, das heisst, die beschriebene Untersuchung ergibt, dass beide Beobachter die Scheitel der umlaufenen Ecken auf der gleichen Seite haben. Zwei Ecken, welche alle Seiten und Winkel entsprechend gleich haben, aber von entgegengesetztem Sinne sind, werden auch symmetrisch gleiche Ecken genannt.

b) Drei Ebenen oder drei Strahlen, welche durch einen Punkt S (Fig. 12) gehen, bestimmen acht dreikantige Ecken.

Fig. 12.



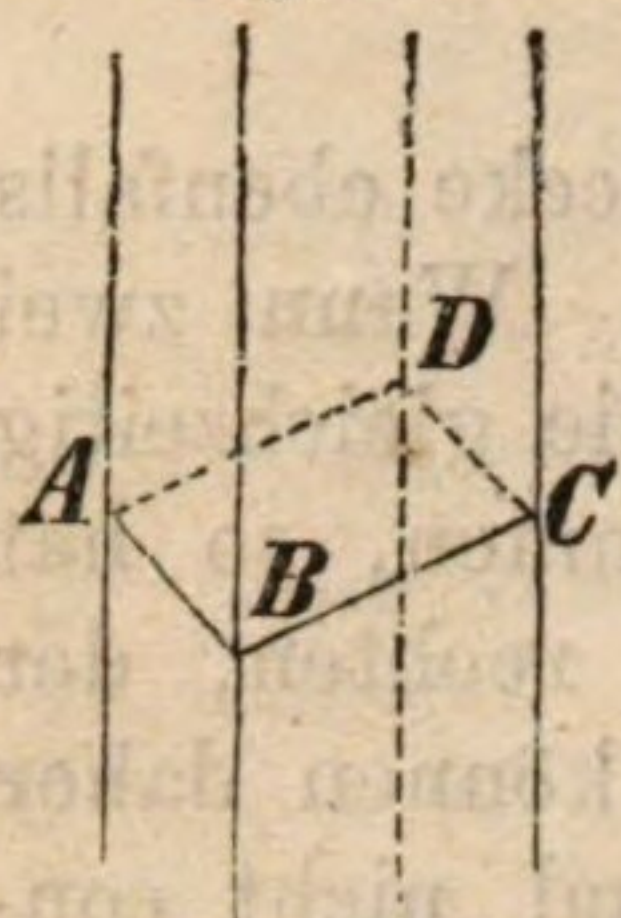
Von einer dieser Ecken $SABC$ ausgehend unterscheidet man zunächst die Gegenecke $SA'B'C'$, sodann die 3 Nebenecken $SABC'$, $SBCA'$, $SCAB'$, welche an den Seiten der ersten Ecke anliegen. Jede Nebenecke hat mit der Ecke $SABC$ eine Seite und den gegenüberliegenden Winkel entsprechend gleich. Die übrigen Stücke beider Ecken sind supplementär.

Nun sind noch drei Ecken übrig, welche Scheitelecken von $SABC$ heissen und an den Kanten dieser Ecke liegen. Sie haben ebenfalls einen Winkel und die gegenüberliegende Seite mit $SABC$ entsprechend gleich, während die übrigen Stücke supplementär sind. Diese Scheitelecken $SA'B'C$, $SB'C'A$ und $SC'A'B$ erscheinen auch als Nebenecken von $SA'B'C'$.

* Die Körper der Beobachter hat man sich im äussern Raume zu denken.

c) Wenn ein Strahl sich so bewegt, dass er immer mit einer gegebenen Richtung parallel ist und an dem Umring eines ebenen n -Ecks ($ABCD$) hingeleitet, so wird ein nach zwei entgegengesetzten Richtungen offener Raum abgeschieden. Derselbe heisst ein Prisma (im weiteren Sinne, vergl. e). Die n -Streifen, welche den Raum begrenzen, werden die Seiten des Prisma genannt. Je zwei benachbarte Seiten stossen in einer „Kante“ zusammen und bilden einen „Winkel“ des Prisma.

Fig. 13.



Anmerkung. Die körperliche Ecke (Fig. 11) wird zum Prisma, wenn der Scheitel S in unendliche Ferne rückt, während das als „Leitlinie“ benützte Vieleck $ABCD$ festgehalten wird.

d) Wenn eine Ebene die sämtlichen Kanten einer körperlichen Ecke trifft, so bestimmt sie mit den Seiten der Ecke einen allseitig begrenzten Raum (Körper), welcher Pyramide genannt wird. Ist die körperliche Ecke n -seitig, so unterscheidet man an der Pyramide ein n -Eck als „Grundfläche“ und n -Dreiecke als Seitenflächen. Auch die Kanten werden als Grundkanten und Seitenkanten unterschieden. Eine von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche gefällte Senkrechte heisst die Höhe der Pyramide. Wenn die Grundfläche der Pyramide einen Mittelpunkt hat, so wird die Verbindungslinie desselben mit der Spitze als Axe der Pyramide bezeichnet. Die Pyramide heisst gerade oder schief, je nachdem die Axe auf der Grundfläche senkrecht steht oder nicht.

e) Aus einem prismatischen Raume wird durch zwei Ebenen (welche sich nicht innerhalb dieses Raumes treffen) ein Körper ausgeschnitten, welcher auch Prisma (im engeren Sinne) genannt wird. Hat der prismatische Raum n -Kanten, so unterscheidet man an dem Prisma zwei n -Ecke als Grundflächen (untere und obere Grundfläche — Grundfläche und Endfläche) und n -Trapeze als Seitenflächen. Wenn die Träger der Grundflächen parallel sind, so stellen die Seitenflächen Parallelogramme dar und die Grundflächen sind congruent. Wenn bei diesem Falle die Grundflächen Mittelpunkte haben, so ist die Verbindungslinie dieser Mittelpunkte mit den Kanten

des Prismas parallel und wird Axe genannt. Die Prismen (überhaupt) heissen gerade oder schief, je nachdem die Kanten (und somit auch die etwa vorhandene Axe) auf der Grundfläche senkrecht steht oder nicht.

Die Congruenz der parallelen Grundflächen folgt aus der Gleichheit entsprechender Seiten, welche Gegenseiten eines Parallelogrammes sind und aus der Gleichheit der entsprechenden Winkel (§ 5 f).

f) Ein Prisma, dessen parallele Grundflächen Parallelogramme sind, kann auf dreierlei Weise als Prisma angesehen werden. Alle Flächen des Körpers sind Parallelogramme und derselbe heisst Parallelepipedon.

Beweis. Dass alle Flächen des Körpers Parallelogramme sind folgt aus dem in e) Gesagten. Nimmt man eine Fläche als Grundfläche an, so folgt aus § 4 e, dass die Seitenkanten des Körpers unter sich parallel sind.

Anmerkung. Ein senkrechtcs Parallelepipedon mit einem Rechteck als Grundfläche ist von lauter Rechtecken begrenzt und wird ein rechtwinkliges Parallelepipedon genannt.

§ 13. Kegel, Cylinder und Kugel.

Wenn ein Strahl des Bündels S (Fig. 14) sich so bewegt, dass er an einer Kreislinie k hingeleitet, so beschreibt er eine Kegelfläche (Kreiskegel im weitern Sinne), welche aus zwei durch das „Centrum“ S getrennten Feldern besteht (Kegel und Gegenkegel). Der bewegte Strahl heisst in jeder Lage eine Kante dieser Fläche. Eine Ebene, welche durch das Centrum des Kegels geht, enthält einen „Centralschnitt“ der Kegelfläche. Derselbe besteht aus einem Punkte, dem Centrum, oder aus einer Kante der Fläche oder aus zwei Kanten, je nachdem sein Träger den Leitkreis nicht oder nur in einem Punkte oder in zwei Punkten trifft.

Im mittleren Falle heisst der Träger des Centralschnitts eine Tangentenebene des Kegels. Die Kegelfläche und die Fläche des Kreises k begrenzen einen Körper, der ebenfalls Kegel (im engern Sinne) genannt wird. Man unterscheidet alsdann die Fläche des Kreises als Grundfläche und



das an der Begrenzung des Körpers beteiligte Stück der Kegelfläche als Mantel des Kegels. Die von der „Spitze“ S auf den Träger der Grundfläche gefällte Senkrechte heisst Höhe des Kegels. Wenn die Spitze S senkrecht über dem Mittelpunkte der Grundfläche k liegt, so heisst der Kegel ein „gerader Kreiskegel“. Die Pyramide, welche als Grundfläche ein regelmässiges Vieleck besitzt, geht in einen Kreiskegel über, wenn die Seitenzahl des Vielecks ins Unbegrenzte wächst.

b) Wenn ein Strahl sich so bewegt, dass er immer einer gegebenen Richtung parallel bleibt und an einer Kreislinie k hingeleitet, so beschreibt er eine „Cylinderfläche“ und heisst in jeder Lage eine Kante dieser Fläche. Diejenige Gerade, welche durch den Mittelpunkt von k parallel zu den Kanten der Fläche gelegt ist, heisst Axe der Cylinderfläche. Die Cylinderfläche, die Fläche des Kreises k und eine weitere Ebene, welche die Axe der Cylinderfläche aber nicht den Kreis k schneidet, begrenzen einen Körper, der Cylinder heisst. Man unterscheidet die beiden „Grundflächen“ und den „Mantel“ des Cylinders. Wenn die Träger der Grundflächen parallel sind, so sind diese congruent. Alsdann versteht man unter der Höhe des Cylinders den Abstand seiner Grundflächen. Wenn die Axe des Cylinders (oder der Cylinderfläche) senkrecht auf der Grundfläche k steht, so ist der Cylinder „gerade“. Ein Cylinder entsteht auch aus einem Prisma mit regelmässiger Grundfläche, wenn die Seitenzahl der letzteren ins Unbegrenzte wächst.

§ 14. Rotationsflächen.

a) Wenn eine ebene Figur sich um eine in ihrem Träger enthaltene Gerade (Axe) dreht, so beschreibt der Umring dieser Figur eine Rotationsfläche. Die Punkte der Figur beschreiben Kreise, deren Träger senkrecht zur Rotationsaxe und unter einander parallel sind — Parallelkreise. Die sich drehende Figur wird in jeder Lage ein Meridian der Fläche genannt.

b) Wenn ein Winkel sich um einen Schenkel dreht, so beschreibt der andere einen „Rotationskegel“ (vergl. den Mantel eines geraden Kreiskegels, § 13). Wenn ein durch zwei

Parallellinien begrenzter Streifen sich um die eine derselben dreht, so beschreibt der andere einen Rotationscylinder (vergleiche die Mantelfläche eines geraden Kreiscylinders, § 13).

c) Wenn ein Kreis sich um einen Durchmesser dreht, so beschreibt er eine Oberfläche, deren Punkte von dem Mittelpunkt M des Kreises um die Länge des Radius r entfernt sind. Diese Oberfläche heisst Kugel. M heisst der Mittelpunkt der Kugel. Jede durch M gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen Radius r ist (Hauptkreis). Die Kugel kann durch Drehung eines beliebigen Hauptkreises um einen Durchmesser beschrieben werden. Die Endpunkte des Durchmessers können als Pole bezeichnet werden. Der Theil der Kugeloberfläche, welcher von einem Pole bis zu einem Parallelkreise (a) reicht, heisst „Kugelhaube“. Der Theil der Kugeloberfläche, welcher zwischen zwei Parallelkreisen liegt, heisst „Zone“. Die Ebene eines Parallelkreises theilt den Kugelkörper in zwei „Kugelabschnitte“ (Segmente). Wenn ein Kugelradius an dem Umringe eines Parallelkreises hingleitet, so beschreibt er einen Kegelmantel, welcher aus dem Kugelkörper einen „Kugelausschnitt“ (Sector) abtrennt.

§ 15. Zwei Sätze über Polyeder.

Ein überall von ebenen Flächen begrenzter Körper heisst Polyeder. Die Definitionen der „Flächen, Ecken und Kanten“ eines Polyeders können leicht aus den Betrachtungen der Pyramide und des Prismas entnommen werden. Von einer Fläche eines Polyeders ausgehend kann man durch Ueberschreiten von Kanten zu jeder andern Fläche desselben kommen. Es ist also möglich, die Oberfläche des Körpers in eine Ebene so auszubreiten, dass je zwei Flächen eine einzige Seite gemein haben. Auf diese Weise entsteht das „Netz“ des Körpers (vergl. § 16, 22).

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die von benachbarten Flächen des Polyeders eingeschlossenen Keilwinkel 180^0 nicht übersteigen. Für solche Polyeder gelten die Sätze a) und b).

a) Die Summe der Ecken und Flächen übertrifft die Zahl der Kanten um zwei: $(e + f) - k = 2$.

Beweis. 1) Das Polyeder ist von lauter Dreiecken begrenzt. Man baue den Körper aus seinen Flächen auf und beobachte den Werth der Differenz $(e + f) - k$. Die erste Fläche liefert für

Fig. 15.



e, f, k die Zahlen 3, 1, 3, so dass jene Differenz den Werth 1 hat. Das Anlegen einer zweiten Fläche vermehrt die Zahlen e, f, k bezüglich um 1, 1, 2, so dass die Differenz ihren Werth behält. Auch das Anlegen einer dritten Fläche, welche ein Winkelfeld zwischen den beiden andern ausfüllt, ändert den Werth der Differenz nicht, da hierdurch die Zahlen e, f, k bezüglich um 0, 1, 1 zunehmen.

Eine Aenderung wird erst eintreten, wenn man das letzte Dreieck einlegt, welches den innern Raum des Polyeders abschliesst. Dabei vermehren sich die Zahlen e, f, k der Reihe nach um 0, 1, 0, so dass der Werth der Differenz auf 2 steigt.

2) Das Polyeder ist nicht von lauter Dreiecken eingeschlossen. Man kann die Flächen in Dreiecke zerlegen, wenn man Diagonalen zieht, die als unächte Kanten angesehen werden mögen. Als dann gilt der Satz nach 1). Wenn man aber eine der unächten Kanten nach der andern weglässt, so vermindern sich die Zahlen f und k um je eine Einheit, während e seinen Werth behält. Die Differenz $(e + f) - k$ ändert sich hierdurch nicht.

b) Die Zahl der Kantenwinkel ist doppelt so gross als die Zahl der Kanten ($w = 2k$).

Beweis. Die Zahl der Polyederkanten ist halb so gross als die Zahl der Polygonseiten auf der Oberfläche des Körpers, weil jede Kante eine gemeinsame Seite zweier benachbarter Polygone ist. Der Satz ergibt sich also, wenn man bedenkt, dass auf jeder Fläche des Polyeders die Zahl der Winkel und Seiten gleich ist.

§ 16. Uebungen.

1α) Was ist das duale Gegenstück zu einer n -seitigen körperlichen Ecke oder einem n -seitigen prismatischen Raume.

Antwort: ein ebenes n -Eck.

β) Das duale Gegenstück zu § 12d auszusprechen.

Andeutung. Man kommt wieder auf die Pyramide: Wenn die Ecken eines ebenen n -Ecks mit einem Punkte ausserhalb verbunden werden, so sind die Ecken und Kanten einer Pyramide bestimmt. Es entsteht eine n -kantige Ecke an der Spitze, während an der Grundfläche n dreikantige Ecken liegen.

2) Den Satz § 15a an der Pyramide zu prüfen.

3) Das duale Gegenstück zu der Entstehung § 12e anzugeben. Vergleiche Aufgabe 1α und β.

Andeutung. Ein ebenes n -Eck und zwei weitere Punkte (ausserhalb seines Trägers und auf verschiedenen Seiten desselben) bestimmen die Ecken, Kanten und Flächen einer Doppelpyramide. Die Zahl der Ecken in derselben ist gleich der Zahl der Seitenflächen bei dem n -seitigen Prisma und umgekehrt. Die Zahl der Kanten ist bei beiden gleich.

4) Den Satz § 15a an dem n -seitigen Prisma und der Doppelpyramide zu verificiren.

5) Wenn man in Fig. 16 (die Buchstaben $A_4, A_5, A_6, B_4, B_5, B_6$ sind in der Figur fortgelassen) die gebrochene Linie $A_1 B_2 A_3 B_4 A_5 B_6 A_1$ und die Umringe der Dreiecke $A_1 A_3 A_5$ und $B_2 B_4 B_6$ zieht, so erhält man die Kanten eines Körpers, der zu den sogenannten Prismatoiden gehört. Man soll Zahl und Art seiner Ecken, Kanten und Flächen angeben.

6) Den Satz § 15a) an dem Prismatoid in 5) zu verificiren.

7) Wie viele Ebenen kann man durch je eine Seite des Dreiecks $A_1 A_3 A_5$ (Fig. 16) und je ein Eck des Dreiecks $B_2 B_4 B_6$ oder je eine Seite von $B_2 B_4 B_6$ und je ein Eck von $A_1 A_3 A_5$ legen.

8) Wie viele von diesen Flächen gehören zur Begrenzung des Prismatoids in Aufgabe 6 (die übrigen Ebenen dringen in das Innere dieses Körpers ein).

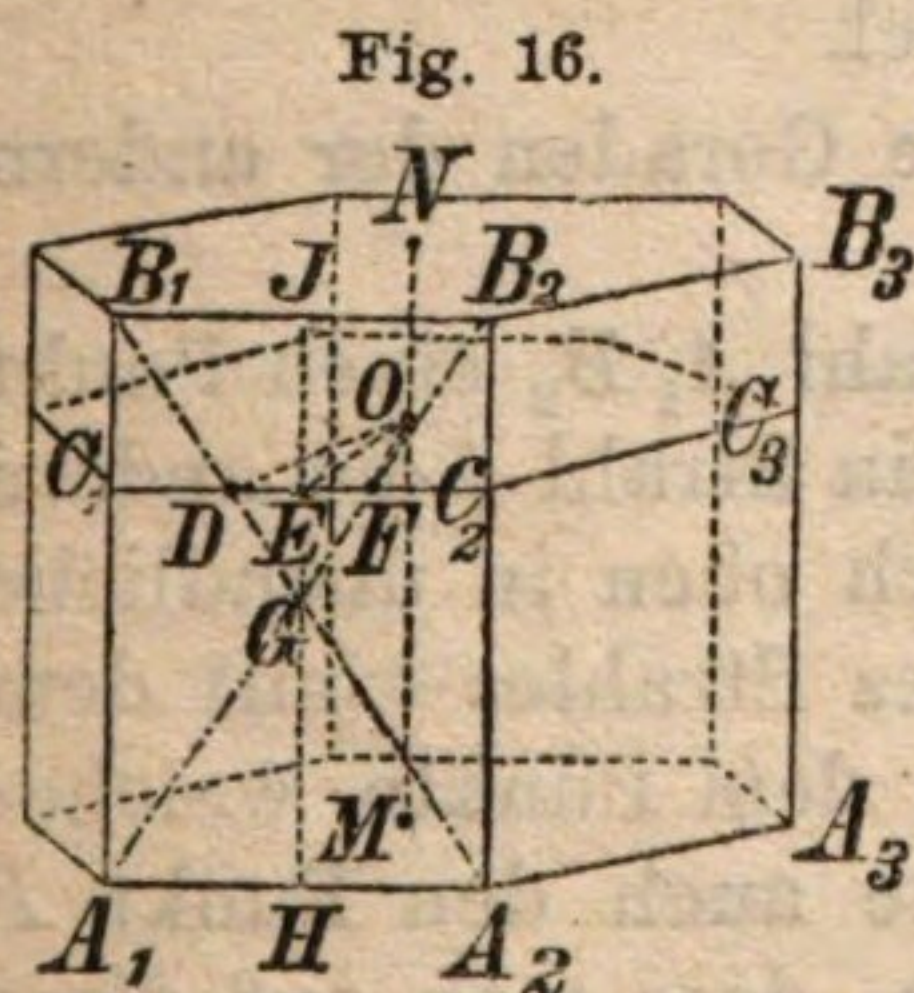
9) Es sei ein m -Eck und ein n -Eck auf parallelen Trägern gegeben. Wie viele Ebenen gibt es, die durch je eine Seite des m -Ecks und einen Eckpunkt des n -Ecks oder durch einen Eckpunkt des ersteren und eine Seite des letzteren gehen.

10) Eine Anzahl dieser Ebenen begrenzt mit den Trägern der Vielecke einen Körper, der Prismatoid heisst (Definition des Prismatoids). Wie viele Ebenen sind dies?

Andeutung. Das Prismatoid hat im Ganzen $m + n + 2$ Flächen.

11) Den Satz § 15a an dem Prismatoid in Aufgabe 10 zu verificiren.

12) Fig. 16 stellt ein senkrechtes Prisma vor, dessen Höhe $MN = h$ bekannt sei. Grund- und Endfläche sind regelmässige Sechsecke, in welchen die gemeinsame Länge des grossen Radius und der Seite mit r bezeichnet werden soll.



Man ziehe die Diagonale $A_1 B_2$ der vordern Seitenfläche und denke die ganze Figur um die Axe MN gedreht. Die Gerade $A_1 B_2$ wird alsdann eine Rotationsfläche beschreiben. Man soll den Radius eines Parallelkreises bestimmen, dessen Mittelpunkt O um die Länge x von dem Mittelpunkt der Höhe entfernt ist.

Andeutung. OF ist der Radius dieses Parallelkreises. Die Dreiecke GEF und $A_1 B_1 B_2$

sind ähnlich. Man hat daher: $\overline{EF} = \overline{EG} \cdot \frac{\overline{B_1 B_2}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{x \cdot r}{h}$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck OEF , in welchem OE der kleine Radius ϱ des Sechsecks ist, findet man $\overline{OF}^2 = \frac{x^2 \cdot r^2}{h^2} + \varrho^2$.

13) Welcher Parallelkreis ist der kleinste?

Andeutung. Der durch G gehende. Für seinen Radius findet sich, wenn man $x = 0$ setzt, der Werth ρ .

14) Die Diagonale $B_1 A_2$ beschreibt bei der in 12) angedeuteten Drehung ebenfalls eine Rotationsfläche. Man beweise, dass beide Rotationsflächen identisch sind.

Andeutung. Die Radien OE und OD zweier in gleicher Höhe liegender Parallelkreise sind gleich gross, wie aus der Berechnung in 12) hervorgeht. Die Parallelkreise fallen daher in jedem Normalschnitt zusammen.

15) Aus 12) und 14) folgt, dass auf der besprochenen Rotationsfläche zwei Schaaren von geraden Linien liegen. Bei der Drehung beschreibt $A_1 B_2$ alle Lagen der Geraden s_1, s_2, s_3 der einen Schaar und $A_2 B_1$ kommt in die Lagen aller Geraden $t_1, t_2, t_3 \dots$ der andern Schaar. Man beweise, dass zwei Geraden derselben Schaar sich nicht schneiden können.

Andeutung. Zwei Strahlen derselben Schaar sind Lagen einer sich drehenden Geraden in verschiedenen Momenten der Bewegung. Wenn sie sich in einem Punkte P treffen, so muss bei der Drehung der Punkt P auf dem zugehörigen Parallelkreise entweder sich nicht weiter bewegt haben oder nach einer ganzen Umdrehung in die alte Lage gekommen sein. Ersteres ist unmöglich und im zweiten Falle würden die beiden Strahlen ganz zusammenfallen, also nur einen Strahl der Schaar darstellen.

16) Durch jeden Punkt P der Rotationsfläche geht ein Strahl der einen und ein Strahl der andern Schaar.

Andeutung. Jede der Geraden $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ gleitet während der Rotation an dem ganzen Umring des Parallelkreises hin, welchem P angehört. Jede der beiden Geraden muss also einmal durch P gehen.

17) Die beiden Strahlen, welche durch diametral gegenüberliegende Punkte des kleinsten Parallelkreises gehen und nicht derselben Schaar angehören, sind parallel.

Andeutung. $A_1 B_2$ und $A_3 B_4$ sind parallel.

18) Jeder Strahl der einen Schaar trifft alle Geraden der andern Schaar.

Andeutung. Man denke sich auf dem Strahl $A_1 B_2$ einen Punkt P in Bewegung. Durch jede Lage von P geht ein Strahl t der andern Schaar. Während der Punkt P von G aus nach oben in unendliche Ferne rückt, so bewegt sich der Schnittpunkt des Strahles t mit dem kleinsten Parallelkreise von G links herum bis zu dem Punkte, welcher G diametral gegenüber liegt (vgl. 17). Man lasse auch den Punkt P von G aus sich abwärts bewegen. Es findet sich, dass man auf diese Weise alle Strahlen t der zweiten Schaar, welche den kleinsten Parallelkreis treffen, d. h. alle Strahlen dieser Schaar überhaupt findet.

19) Nach 16) geht durch einen beliebigen Punkt P der Oberfläche ein Strahl s der einen und ein Strahl t der andern Schaar. Die durch s und t gelegte Ebene enthält keinen weiteren Punkt der Oberfläche.

Andeutung. Durch einen solchen Punkt G müsste ein Strahl s_1 der ersten Schaar gehen (16), welcher t schneidet aber s nicht trifft.* Dies ist unmöglich.

20) Die gelegte Ebene heisst die Tangentenebene des Punktes P . Jede in ihr durch P gelegte Gerade (Tangente) hat mit der Oberfläche nur diesen Punkt gemein. Ausgenommen sind jedoch die Geraden s und t selbst.

21) Aus 16) und 18) folgt, dass die beschriebene Rotationsfläche zu den Regelflächen gehört, von denen in § 11, Aufgabe 4 die Rede ist.

22) Das Netz einer geraden Pyramide mit regelmässiger sechseckiger Grundfläche zu zeichnen.

Andeutung. Ein regelmässiges Sechseck, dem an jeder Seite ein gleichschenkliges Dreieck angefügt ist. Diese gleichschenkligen Dreiecke sind congruent. Es gibt jedoch verschiedene Arten das Netz eines Körpers zu zeichnen. Man sieht behufs der Herstellung von Modellen darauf, dass die Begrenzung der Netzfigur möglichst geringe Länge habe. Die zweckmässigere Darstellung des Netzes für die Pyramide findet sich in dem Abschnitt, der über die Berechnung der Oberflächen handelt.

* Auch nicht im Unendlichen.

Zweiter Cursus.

III. Abschnitt.

Projectionslehre.

§ 17. Centrische Projection und Parallelprojection.

Man denke sich zwei Ebenen ε und ε' und einen Punkt M (Fig. 17), der weder auf ε noch auf ε' gelegen ist, oder eine Richtung m (Fig. 18), welche weder mit ε noch mit ε' parallel

Fig. 17.

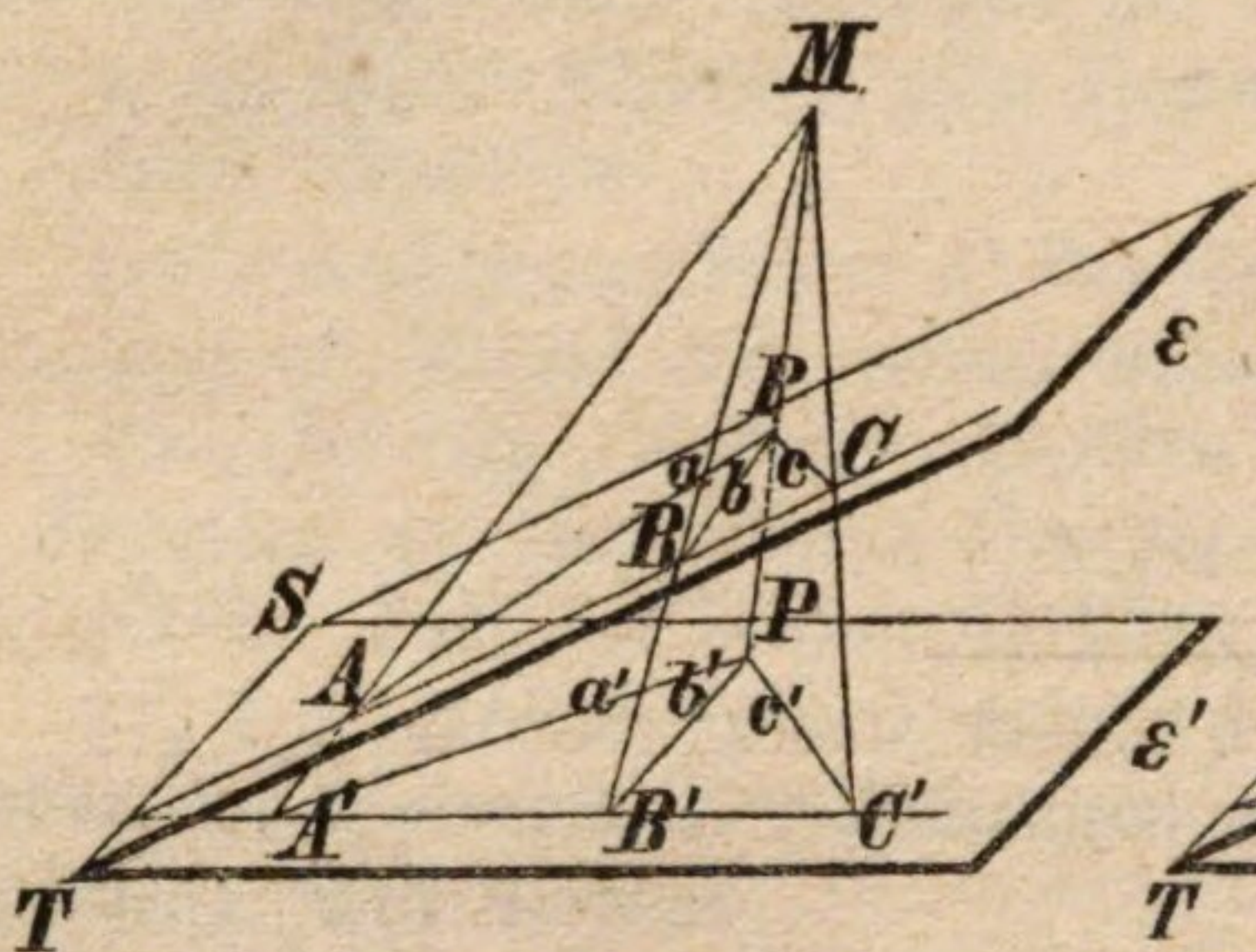
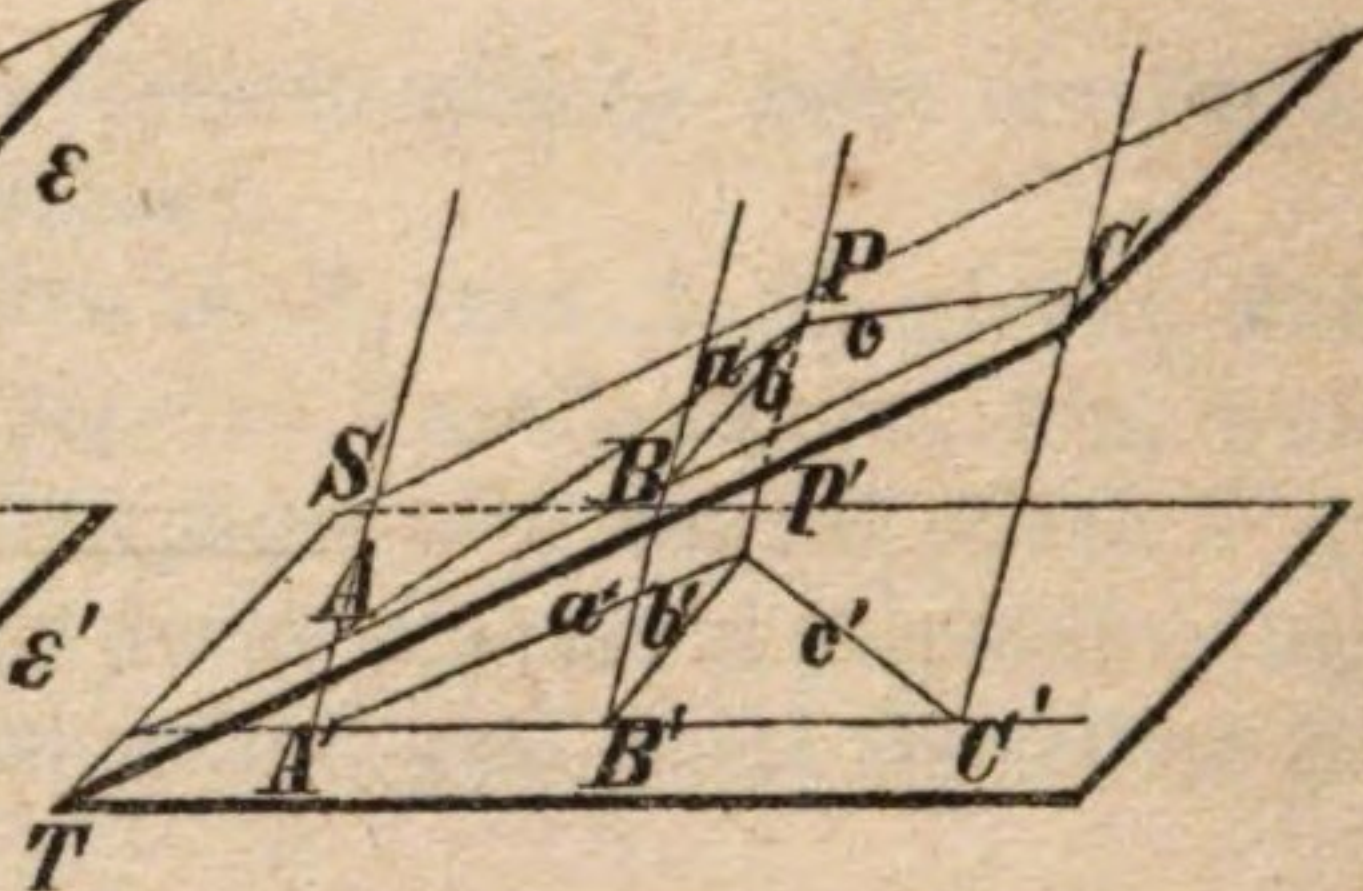


Fig. 18.



ist. Der Punkt M (als Scheitel) oder die Richtung m bestimmen ein Strahlenbündel (Ebenenbündel), welches im zweiten Falle ein Parallelstrahlenbündel sein wird. Ein beliebiger Punkt P der Ebene ε bestimmt einen Strahl des Bündels (projicirender Strahl) und dieser trifft die Ebene ε' in einem Punkte P' , welcher die Projection von P auf die Ebene ε' genannt wird. Umgekehrt kommt man durch dieselbe Operation von dem Punkte P' auf den Punkt P zurück. P und P' sollen entsprechende (homologe) Punkte der Ebenen heißen. Irgend eine Gerade g in ε bestimmt eine Ebene des Bündels (projicirende Ebene) und diese schneidet die Ebene ε' in einer andern Geraden g' , welche die Projection von g auf die Ebene ε' heisst. Von g' kommt man durch dieselbe Operation auf die Gerade g zurück. g und g' heißen entsprechende Geraden der beiden Ebenen ε und ε' . Auf diese

Weise können die Punkte und Geraden einer Ebene (Originalfigur — Originalebene) auf einer anderen Ebene abgebildet werden (Abbildung — Bildebene). Man nennt das Verfahren die centrische Projection (perspectivische Projection) oder die Parallel-Projection, je nachdem das angewendete Strahlenbündel einen Scheitel (Centrum) hat oder ein Parallel-Strahlenbündel darstellt.

a) Wenn mehrere Punkte der einen Ebene auf einer Geraden liegen, so befinden sich die Abbildungen dieser Punkte auf der entsprechenden Geraden der andern Ebene.

α) Wenn mehrere Strahlen der einen Ebene durch einen Punkt gehen, so gehen die Abbildungen dieser Geraden durch den entsprechenden Punkt der andern Ebene.

Beweis e. a) Wenn die Punkte A, B, C auf ε in der Geraden g liegen, so befinden sich die projecirenden Strahlen derselben auf einer Ebene, welche in einem Falle (Fig. 17) durch g und M bestimmt, im andern Falle aber (Fig. 18) durch g parallel mit der Geraden m gelegt ist. Die Abbildungen der Punkte liegen also auf derjenigen Linie, in welcher die Bildfläche von jener Ebene geschnitten wird, d. h. auf der Geraden g' , welche g entspricht.

α) Wenn die Geraden a, b, c auf ε durch den Punkt P gehen, gehen auch die projecirenden Ebenen durch denjenigen Strahl des Bündels, welcher den Punkt P enthält (für den Fall von Fig. 18 vergleiche § 4 c). Die Abbildungen dieser Geraden gehen also durch den Punkt, in welchem die Bildfläche von jenem Strahle geschnitten wird, d. h. durch den Punkt P' , welcher P entspricht.

b) Die Abbildung eines Kreises ist eine krumme Linie (Curve), welche als Schnitt eines Kreiskegels oder Cylinders mit einer Ebene erscheint. Diese Curven können von einer Geraden höchstens in zwei Punkten getroffen werden. Durch jeden Curvenpunkt geht eine einzige Gerade, welche mit der Curve keinen weitem Punkt gemein hat und Tangente genannt wird.

Beweis. Diejenigen Strahlen des Bündels, welche die Punkte eines Kreises projeciren, sind Kanten eines Kegels oder Cylinders. — Wenn drei Punkte der Curve sich auf einer Geraden befinden, so würden die entsprechenden Kreispunkte auch auf der entsprechenden Geraden liegen müssen, was unmöglich ist. — Eine Gerade g' welche durch einen Curvenpunkt P' gezogen ist, entspricht einer Geraden g der Originalfigur, welche den homo-

logem Kreispunkt P enthält. Ist g eine Sekante des Kreises, so muss g' die Curve in einem zweiten Punkte treffen. Nur der Kreistangente im Punkte P entspricht eine Gerade, welche durch P' geht und keinen weiteren Punkt mit der Curve gemein hat.

Anmerkungen. 1) Ein Kreis wird nur dann als gerade Linie abgebildet, wenn der Scheitel des Büschels auf der Original-ebene gelegen ist oder die Strahlen des Büschels mit dieser Ebene parallel sind. Dieser Fall wurde aber durch die Voraussetzungen ausgeschlossen.

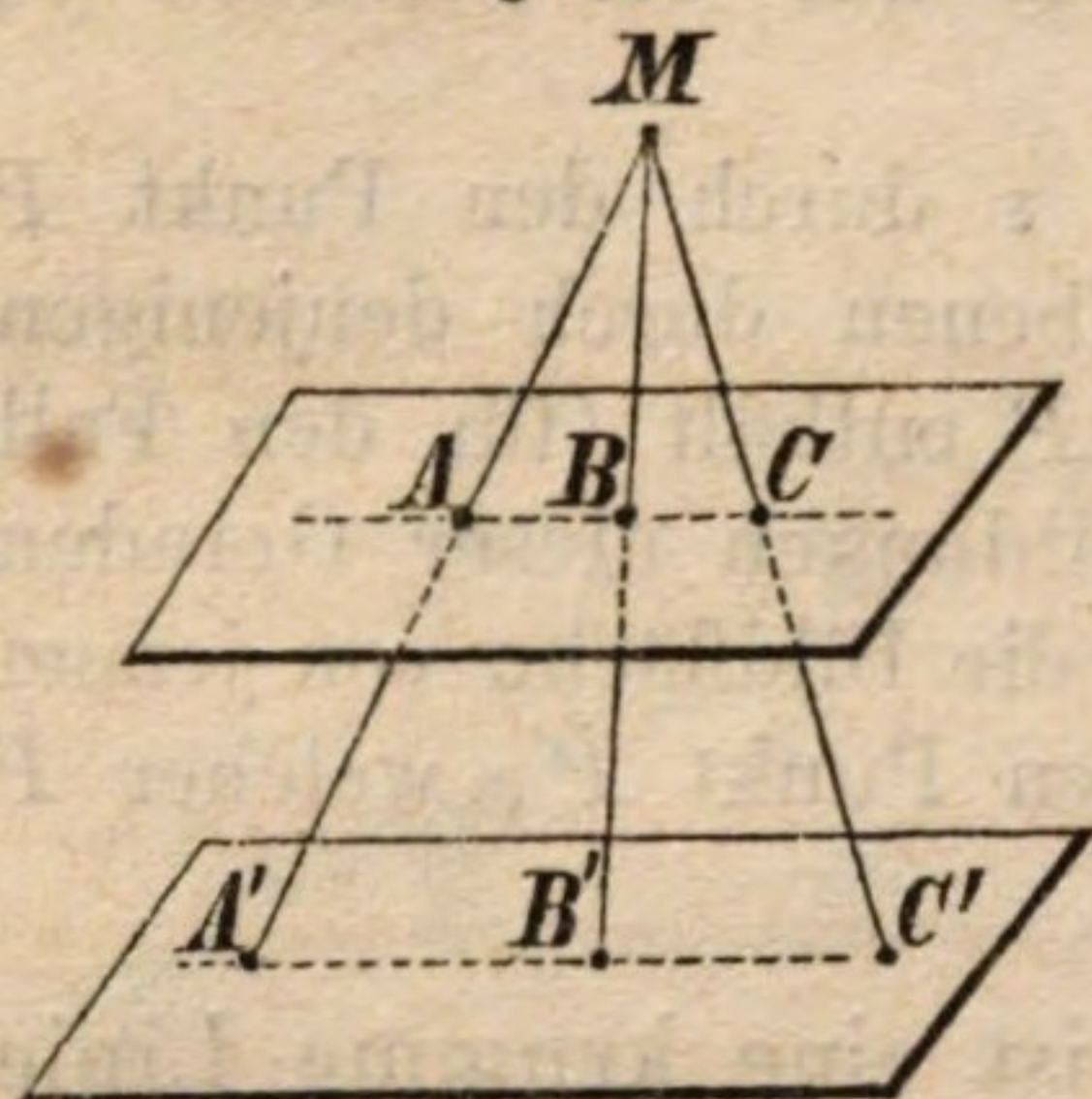
2) Später wird bewiesen, dass die Schnittlinien eines Cylinders mit ebenen Flächen keine eigenartigen Curven sind, sondern auch als Kegelschnitte dargestellt werden können.

§ 18. Centrische Projection.

Fall, wo die Projectionsebenen parallel sind.

a) Je zwei entsprechende Geraden sind parallel. Entsprechende Winkel sind gleich. Die Verhältnisse ent-

Fig. 19.



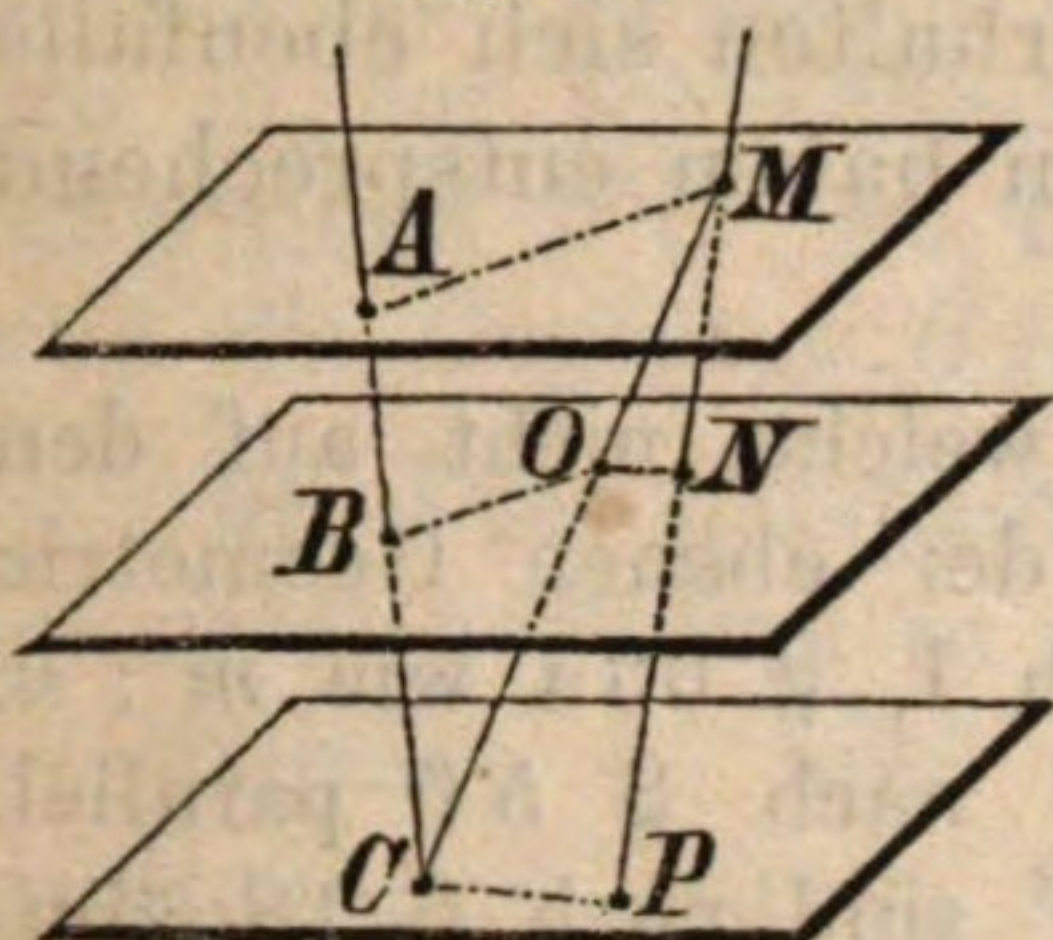
sprechender Strecken sind unter sich und denjenigen Verhältnissen gleich, welche die Abstände entsprechender Punkte vom Centrum der Projection bilden.

Beweis. Entsprechende Geraden sind nach § 5b parallel; entsprechende Winkel sind nach § 5f gleich. Wenn $A, A'; B, B'$ (Fig. 19) zwei beliebige Paare entsprechender Punkte sind, so sind die Verhältnisse $MA : MA'$ und $MB : MB'$ gleich, weil die in dem Winkel $A'MB'$ liegenden Strecken AB und $A'B'$ parallel sind (G. § 63a). Denselben Werth hat nach G. § 63a das Verhältniss $AB : A'B'$ zweier beliebiger entsprechender Strecken.

Folgerungen. Entsprechende Punktreihen sind ähnlich, weil sie durch den Schnitt eines Strahlenbüschels mit parallelen Geraden entstehen (G. § 64a, Anm.). Entsprechende Strahlenbüschel sind congruent, weil in ihnen die entsprechenden Winkel gleich sind. Entsprechende Dreiecke und Vielecke sind nach G. § 79b und § 86a ähnlich. Die Abbildung eines Kreises ist wieder ein Kreis. Dies Alles kann in dem Ausspruch zusammengefasst werden: Die entsprechenden ebenen Systeme sind ähnlich.

Es möge hier noch folgender Satz eingeschoben werden.

Fig. 20.



b) Wenn zwei Geraden von parallelen Ebenen geschnitten werden, so verhalten sich zwei Abschnitte der einen Geraden, wie die entsprechenden Abschnitte der andern.

Um

$$AB : BC = MN : NP$$

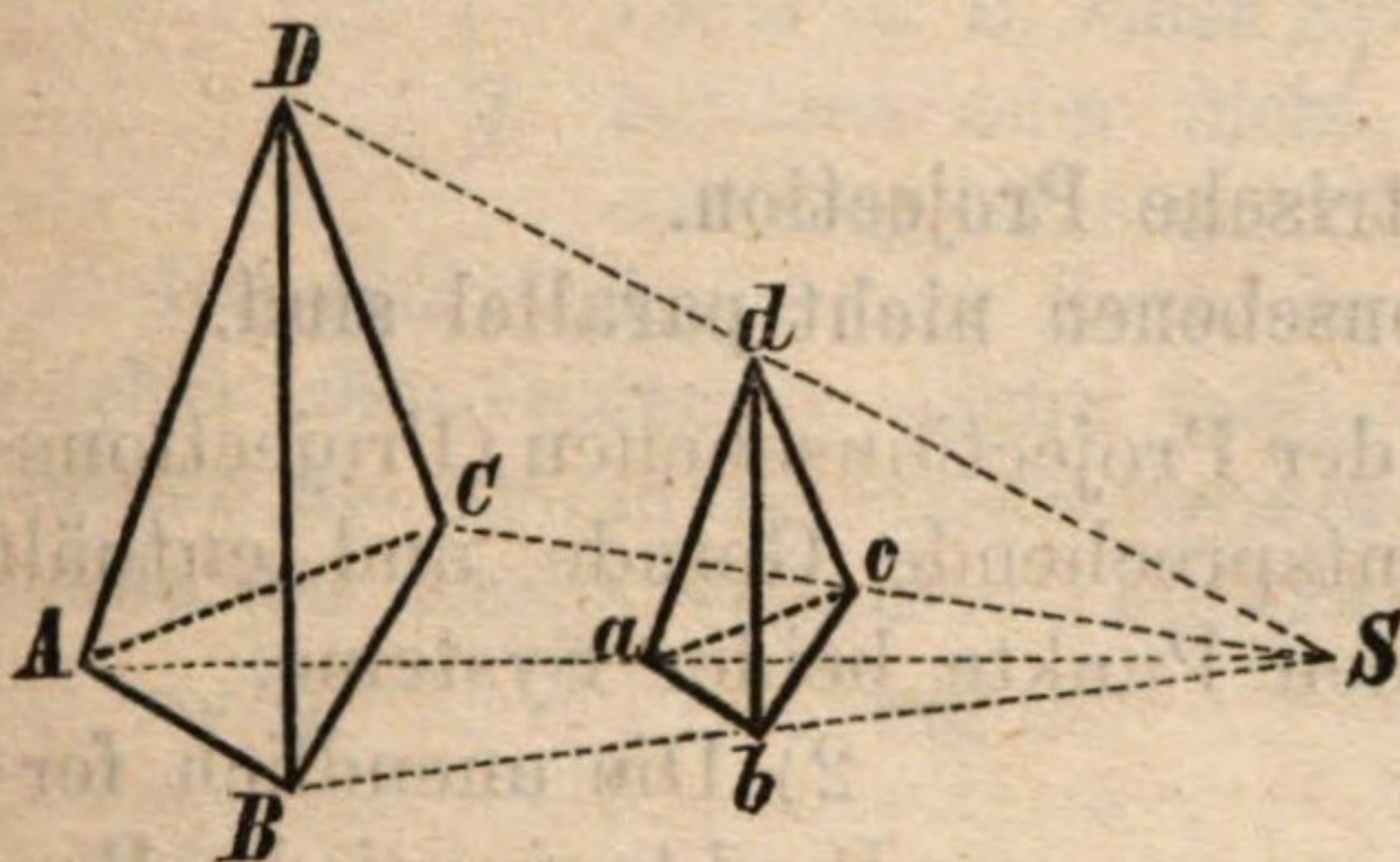
zu beweisen, ziehe man die Strecke MC , welche die mittlere Ebene in O schneiden möge. Aus G. § 63a ergibt sich

$$AB : BC = MO : OC = MN : NP.$$

§ 19. Perspektivische Lage. — Aehnliche Polyeder.

Wenn ein ebenes System und die centrische Projection desselben auf eine andere Ebene in der Lage von Fig. 17 sind,

Fig. 21.



so dass je zwei entsprechende Punkte sich auf einem Strahle des Bündels befinden, so sagt man, beide Systeme seien perspektivisch gelegen. Jede andere Lage der Systeme heisst eine „schiefe“. Dieselben Ausdrücke gebraucht man auch von Polyedern, deren Punkte sich paarweise entsprechen.

Kann man solche Polyeder so legen, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte Strahlen eines Bündels sind, so befinden sich die Körper in perspektivischer Lage, während die frühere Lage eine „schiefe“ war.

a) Wenn die Eckpunkte zweier Polyeder sich paarweise entsprechen, so sind dadurch auch die Kanten oder Diagonalen und die Flächen oder Diagonalebene der Körper paarweise auf einander bezogen. Polyeder dieser Art werden ähnlich genannt, wenn man sie in perspektivische Lage bringen kann und alsdann die Abstände entsprechender Ecken vom Centrum des Büschels immer dasselbe Verhältniss $m : n$ bilden.

Für ähnliche Polyeder gelten folgende Sätze.

b) Entsprechende Strecken stehen in dem Verhältniss

$m : n$; ihre Träger sind parallel. Entsprechende Flächen sind ähnlich und verhalten sich wie $m^2 : n^2$; ihre Träger sind parallel. Die Oberflächen der Körper verhalten sich ebenfalls wie $m^2 : n^2$. Homologe körperliche Ecken haben entsprechend gleiche Seiten und Winkel.

Beweis. Entsprechende Strecken (welche nicht auf den Strahlen des Büschels liegen) sind nach der ebenen Geometrie I, § 63 α parallel. Sie verhalten sich nach I, § 63 a wie $m : n$. Die Träger entsprechender Flächen sind nach § 5 f parallel. Diese Flächen α und α' , β und β' , γ und γ' sind nach § 18 ähnliche Figuren. Dieselben verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Kanten, also wie $m^2 : n^2$. Aus

$$\alpha : \alpha' = \beta : \beta' = \gamma : \gamma' \dots = m^2 : n^2$$

folgt aber

$$\alpha + \beta + \gamma \dots : \alpha' + \beta' + \gamma' \dots = m^2 : n^2.$$

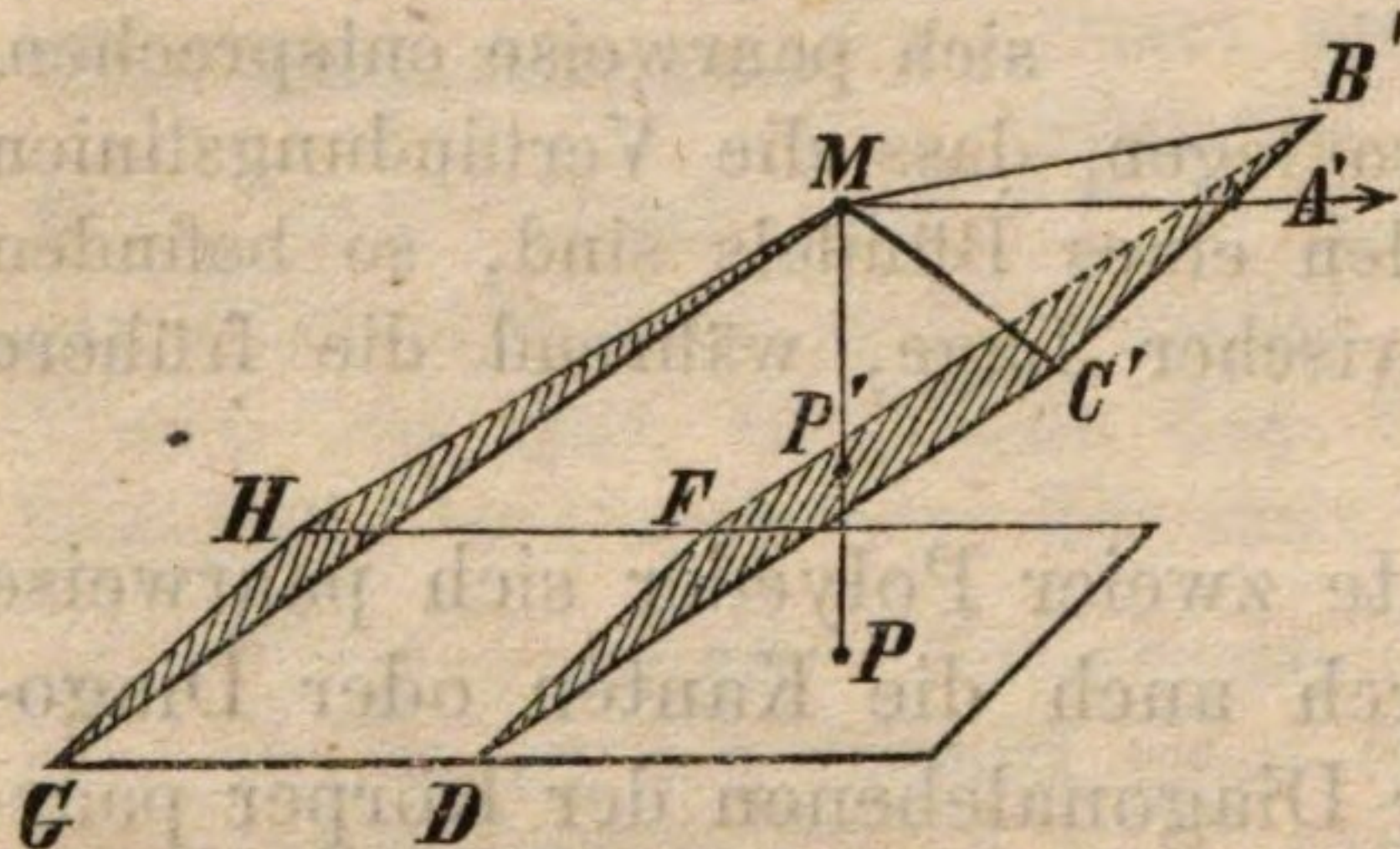
Die Seiten homologer Ecken sind nach § 5 f einander gleich. Die Winkel in diesen Ecken sind gleich, weil ihre Seiten paarweise parallel sind (§ 9 Anm.).

§ 20. Centriscche Projection.

Fall, wo die Projectionsebenen nicht parallel sind.

a) 1) Die Schnittlinie der Projectionsebenen (Projectionsaxe) ist eine sich selbst entsprechende Gerade und enthält die sich selbst entsprechenden Punkte beider Systeme.

Fig. 22.



2) Die unendlich fernen Punkte einer jeden Projectionsebene entsprechen den Punkten einer Geraden in der andern Ebene. Diese beiden Geraden sind mit der Projectionsaxe parallel und heissen Gegenaxen.

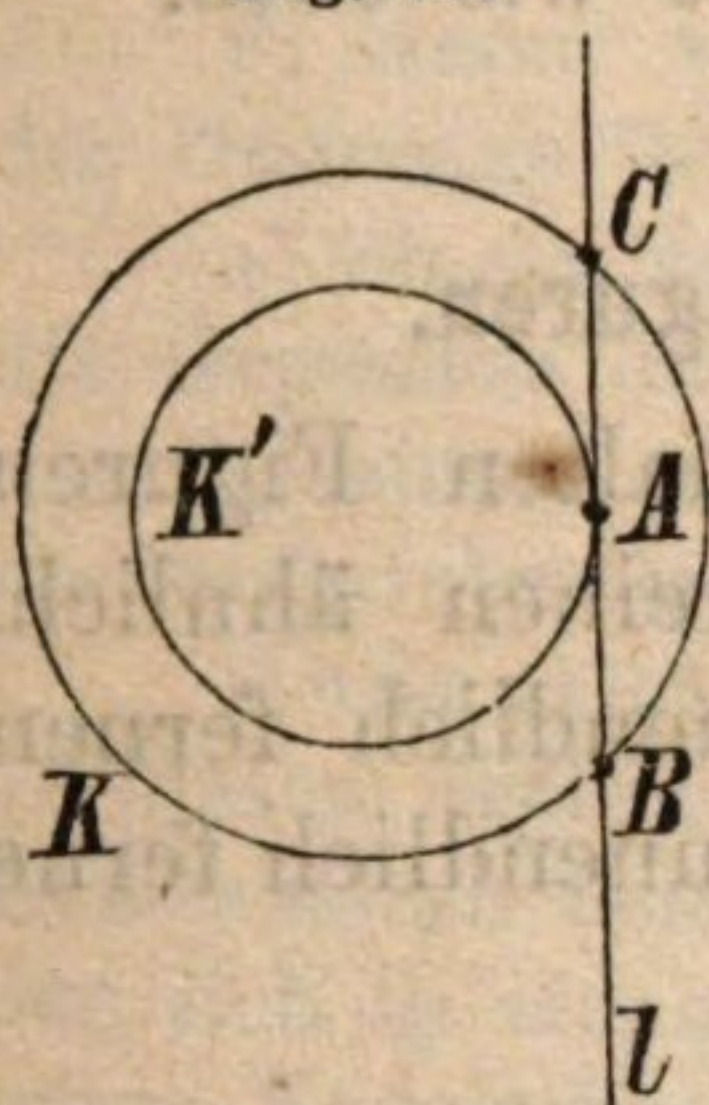
1) Die gemeinsamen Punkte der Ebenen entsprechen sich selbst, weil in ihnen ein projicirender Strahl beide Ebenen zugleich schneidet. Die Schnittlinie der Ebenen entspricht sich selbst, weil in ihr eine projicirende Ebene die beiden Projectionsebenen zugleich trifft.

2) Einem unendlich fernen Punkte A der Objectebene gehört ein mit dieser Ebene paralleler projicirender Strahl MA' zu

(Fig. 22), der die Bildebene in dem zu A zugehörigen Punkte A' trifft. Alle so erhaltenen Strahlen MA' liegen in einer zur Objectebene parallelen Ebene $MC'B'$. Die Punkte A' liegen folglich in der Schnittlinie dieser Ebene mit der Bildebene. Diese Schnittlinie $B'C'$ ist die Gegenaxe auf der Bildebene. Analog wird die Gegenaxe GH auf der Originalebene erhalten.

b) Die perspectivischen Bilder von Kreisen (Kegelschnitte) zerfallen in drei Arten. Die Curven der ersten Art — Ellipsen — sind geschlossene Curven. Die Curven der zweiten und dritten Art — Parabeln und Hyperbeln — erstrecken sich bis in den unendlich fernen Theil der Ebene. Man hat ihnen bezüglich einen oder zwei unendlich ferne Punkte zuzuschreiben.

Fig. 23.



Da die Gegenaxe der Originalebene alle Punkte enthält, welche durch unendlich ferne Punkte abgebildet werden, so wird die Abbildung irgend einer in der Originalebene gezeichneten Linie (z. B. eines Kreises) unendlich ferne Punkte besitzen oder nicht, je nachdem die Linie von der Gegenaxe getroffen wird oder nicht.

Ist zum Beispiel ein Kreis in der Originalebene gegeben, welcher die Gegenaxe nicht trifft, so wird der Kegelschnitt, welcher die Abbildung dieses Kreises darstellt, ganz im endlichen Theile der Ebene verlaufen (Fig. 24). Berührt jedoch der Kreis

Fig. 24.

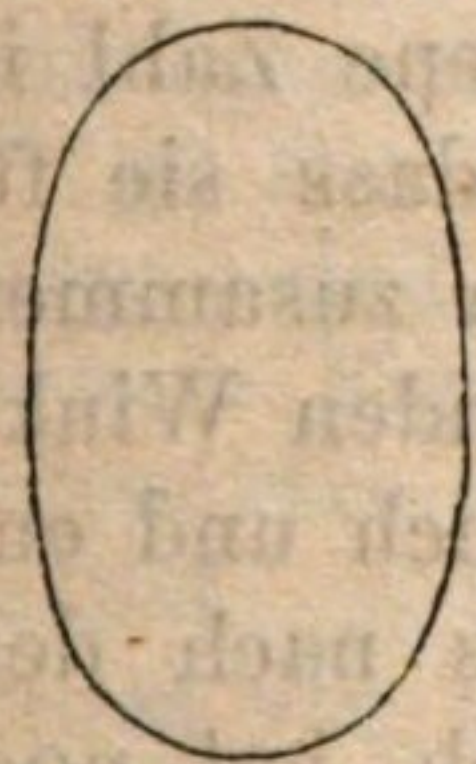


Fig. 25.

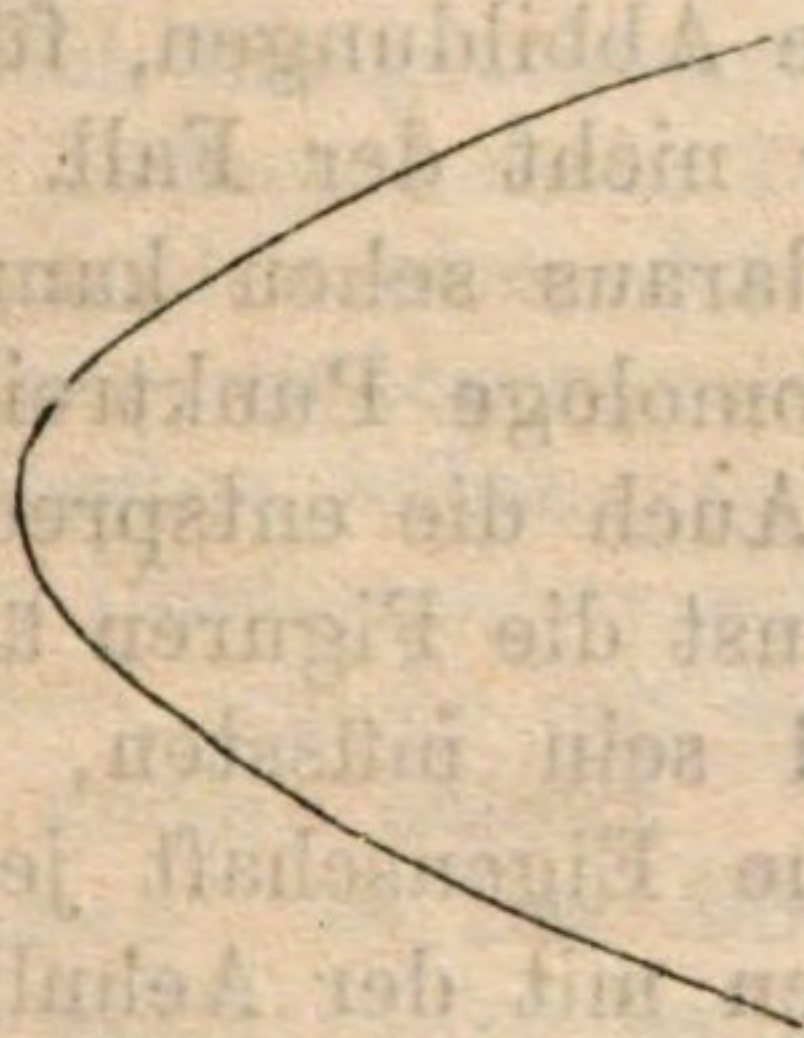
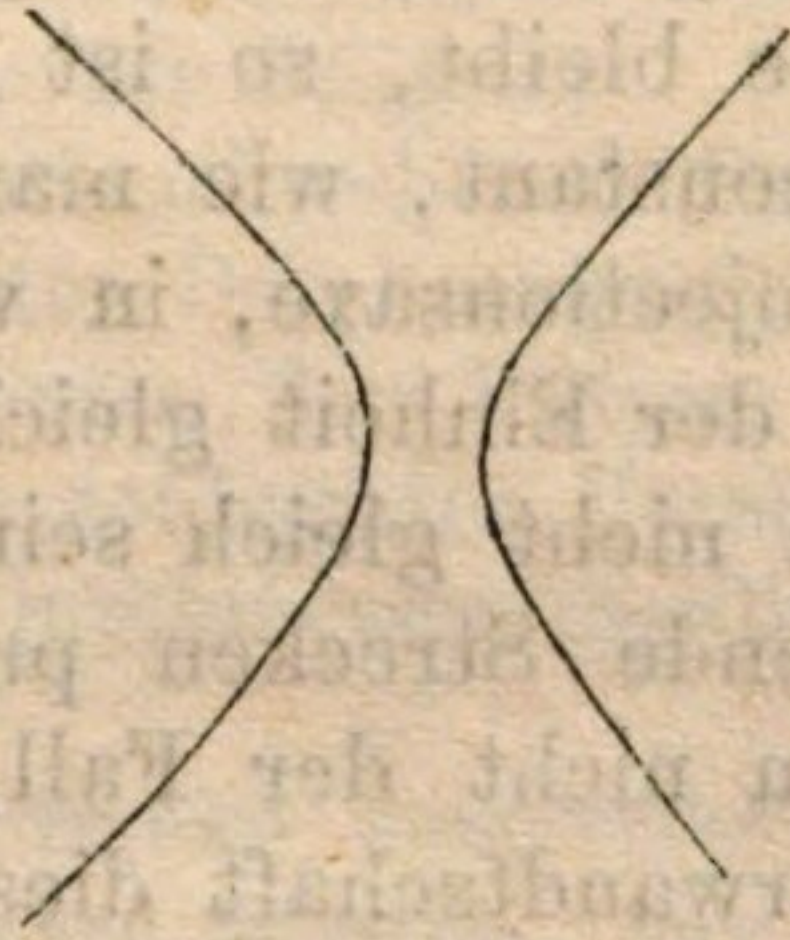


Fig. 26.



die Gegenaxe in A (Fig. 23), so besteht zwar der Kegelschnitt noch aus einem einzigen Zweige (Fig. 25), erstreckt sich aber bis in den unendlichen Theil der Ebene (Fig. 25) (hat einen unendlich fernen Punkt). Im dritten Falle, wo der Kreis die Gegenaxe in B und C (Fig. 23) schneidet, besteht der Kegelschnitt aus zwei Zweigen (Fig. 26), welche den durch die Punkte B und C getrennten Kreisbogen entsprechen. Diese Zweige hat man

sich als im unendlichen Theile der Ebene zusammenhängend vorzustellen. Die drei Arten der Kegelschnitte werden als Ellipse, Parabel und Hyperbel unterschieden.

Anmerkung. Eine nur in der Form von dem eben Gesagten verschiedene Art, die Unterscheidung der Kegelschnitte zu machen, ist die folgende. Man lege durch das Centrum des Kegels eine Ebene α , welche mit dem Träger ϵ des Kegelschnitts parallel ist. Je nachdem die Ebene α alle Kegelkanten im Centrum schneidet oder nur eine Kante des Kegels enthält (Berührungsebene) oder deren zwei, wird auch der Träger des Kegelschnitts alle Kegelkanten schneiden oder mit einer einzigen Kante parallel sein oder mit zweien. Hieraus folgt das Uebrige wie oben.

§ 21. Parallel-Projection. — Affine Figuren.

a) Bei den durch Parallelprojection erhalten Figuren (affine Figuren) sind entsprechende Punkt reihen ähnlich. Entsprechende Winkel sind ungleich. Den unendlich fernen Punkten des einen Systems entsprechen wieder unendlich ferne Punkte des andern.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo die Projectionsebenen sich (in der Projectionssaxe) schneiden. Entsprechende Punktreihen sind ähnlich, weil sie durch den Schnitt eines Winkels mit Parallelen entstehen. Während aber im Falle des § 18 die entsprechenden Strecken beider Ebenen proportional sind und daher die Zahl, welche angibt, wie vielmal die Strecken einer Geraden grösser oder kleiner sind als ihre Abbildungen, für alle Geraden dieselbe bleibt, so ist dies hier nicht der Fall. Jene Zahl ist nicht constant, wie man schon daraus sehen kann, dass sie für die Projectionssaxe, in welcher homologe Punktreihen zusammenfallen, der Einheit gleich wird. Auch die entsprechenden Winkel können nicht gleich sein, weil sonst die Figuren ähnlich und entsprechende Strecken proportional sein müssten, was nach dem Vorigen nicht der Fall ist. Eine Eigenschaft jedoch hat noch die Verwandtschaft dieser Figuren mit der Aehnlichkeit gemeinsam, dass keine Gegenaxen existiren, d. h. dass die Abbildungen von Punkten im Endlichen oder Unendlichen liegen, je nachdem das Eine oder Andere mit den Punkten der Originalfigur der Fall ist. Man folgere dies aus den Eigenschaften der ähnlichen Punktreihen.

Anmerkung. Es ist zu bemerken, dass die Affinität in Congruenz übergeht, wenn die Projectionsebenen parallel werden.

§ 22. Uebungen.

1) Zwei entsprechende Geraden schneiden sich auf der Projectionsaxe.

2) Die Gegenaxen sind mit der Projectionsaxe parallel.

3) Welche Figur entspricht unter den Voraussetzungen des § 20

α) einem Parallelogramme, von welchem keine Seite mit der Gegenaxe parallel ist;

β) einem Parallelogramme, von welchem zwei Gegenseiten mit der Gegenaxe parallel sind;

γ) einem Trapeze, dessen parallele Seiten mit der Gegenaxe parallel sind, während die Träger der andern Seiten sich auf der Gegenaxe schneiden;

δ) einem vollständigen Viereck, welches zwei Nebenecken auf der Gegenaxe liegen hat;

ϵ) einem vollständigen Vierseit, in welchem eine Diagonale durch die Gegenaxe dargestellt ist;

ζ) einem regelmässigen Sechseck mit dem einbeschriebenen und umbeschriebenen Kreise.

Andeutung zu ζ). Ein Sechseck, welches nicht regelmässig ist. In diesem Sechseck gehen die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt und je zwei gegenüberliegende Seiten schneiden sich in einem Punkte der Gegenaxe. Ferner enthält die Abbildung einen Kegelschnitt, der jenem Sechseck einbeschrieben ist und einen andern Kegelschnitt, der ihm umbeschrieben ist.

4) Der Schnitt eines Kreiscylinders mit einer Ebene stellt wieder einen Kreis dar oder er besteht aus zwei Geraden oder er ist eine Ellipse. Diese Ellipse ist eine dem Kreise affine Figur (§ 21). Man beweise nun die folgenden Behauptungen:

α) Die Ellipse hat einen Mittelpunkt, d. h. einen Punkt, welcher die Mitte der durch ihn gezogenen Sehnen ist. (Die durch den Mittelpunkt gezogenen Sehnen heissen Durchmesser der Ellipse.)

β) Die Diagonalen eines der Ellipse umbeschriebenen Parallelogramms sind Träger von sogenannten conjugirten Durchmessern, welche folgende Eigenschaften haben: 1) Die Tangenten der Ellipse in den Endpunkten eines Durchmessers sind mit dem conjugirten Durchmesser parallel. 2) Sehnen, welche mit dem einen Durchmesser parallel sind, werden von dem andern halbirt.

Andeutungen. α) Der Mitte einer Strecke entspricht in der affinen Figur der Mittelpunkt der entsprechenden Strecke. Der Mittelpunkt der Ellipse ist dem Mittelpunkt des Kreises entsprechend.

β) Dem umbeschriebenen Parallelogramm entspricht wieder ein Parallelogramm, welches einen Rhombus darstellt, weil es einem Kreise umbeschrieben ist. Die Diagonalen dieses Rhombus sind Träger von zwei senkrechten Durchmessern. Für dieselben sind die Eigenschaften 1) und 2) erfüllt. Man schliesst dasselbe für die affine Figur.

IV. Abschnitt.

Darstellung von Körperformen in schiefwinkliger Parallelprojection.

§ 23. Das Axenkreuz.

XOY , Tab. I, Fig. 1*, sei die Abbildung eines rechten Winkels, auf dessen Träger im Scheitel O der Strahl OZ senkrecht steht. Alsdann ist jeder der drei Strahlen OX , OY , OZ zu den beiden andern Strahlen und ihrem Träger normal (§ 6a) und die drei Richtungen (Axen) können als die Hauptdimensionen der Länge, Breite und Höhe in einer Körperform angesehen werden. Man trage die Längeneinheit nach OA , OB und OC ab, wobei OB in der Figur verkürzt erscheint. Die Figur der vier Punkte O , A , B , C soll nun durch Parallelprojection auf eine ebene Fläche α abgebildet werden.

Die Bildfläche sei parallel zur Ebene XOZ und wir legen sie der Einfachheit wegen durch den Punkt B .

Der Punkt B fällt alsdann mit seiner Abbildung zusammen. Die Projectionsstrahlen OO' , AA' , CC' , welche zu den Abbildungen O' , A' , C' der übrigen Punkte führen, sind unter sich parallel. Aus der Lage der Bildfläche folgt nach § 5b, dass $O'A' \parallel OA$ und $O'C' \parallel OC$. Die Vierecke $OAA'O'$ und $OCC'O'$ sind somit Parallelogramme und man hat $O'A' = OA$, $O'C' = OC$. Dieses Resultat drücken wir in Worten aus:

Die Dimensionen OA und OC (der Länge und Höhe) erscheinen in der Abbildung unverändert, sowohl was ihre Richtung als ihre Länge anlangt. Ausserdem kann man, wie leicht zu sehen ist, die Richtung der Projectionsstrahlen so wählen, dass die dritte Dimension OB der Abbildung einen beliebigen Winkel mit $O'A'$ bildet und dass ihre Länge in einem beliebigen Verhältniss verändert erscheint.

In der That, da der Punkt O' , welcher die Richtung OO' der Projectionsstrahlen bestimmt, willkürlich ist, so kann dem Winkel $BO'A'$ und der Strecke BO' jede beliebige Grösse gegeben werden.

In den folgenden Zeichnungen ist $O'B = \frac{1}{3}O'A'$ und $\angle BO'A' = 150^\circ$ oder $\angle DO'A' = 30^\circ$ angenommen.

* Die Figuren für diesen Abschnitt finden sich auf Tafel I. Man zeichne nach den Angaben des Textes mit Beihülfe der Figuren auf

§ 24. Der Würfel.

$ABCD$ in Fig. 2 sei die Abbildung eines Quadrats, welches in der Ebene XOY (Fig. 1) so liegt, dass die Seiten DC und DA bezüglich mit den Axen OX und OY parallel sind. Sie stellt ein Parallelogramm vor, in welchem $AD = \frac{1}{3}AB$ und $\angle DAB = 30^\circ$. In den vier Ecken des Quadrats seien vier Strecken von der Länge AB senkrecht auf dem Träger des Quadrats errichtet. Diese senkrechten Strecken müssen nach § 7b unter einander und mit der Axe OZ parallel sein. Ihre Abbildungen sind also mit der Abbildung von OZ parallel zu zeichnen und von gleicher Länge mit AB . Man hat nun acht Punkte als Abbildungen der acht Eckpunkte eines Körpers erhalten, welcher Würfel heisst und dessen Eigenschaften in den folgenden Uebungen betrachtet werden.

Uebungen.

1) Die vier Seitenflächen sind Quadrate. — $ABFE$ zum Beispiel ist ein Parallelogramm, weil AE und BF gleich und parallel sind. Dieses Parallelogramm wird als Quadrat erkannt, weil $AB = BF$ und $\angle ABF = 90^\circ$.

2) Die obere Endfläche $EFGH$ ist auch ein Quadrat, dessen Träger mit der Grundfläche parallel ist. Man schliesse dies daraus, dass die Seiten von $EFGH$ mit denen von $ABCD$ gleich und parallel sind. Vergl. § 5f.

3) Die Keilwinkel an den Würfelkanten betragen 90° . — Der rechte Winkel ABC erscheint zum Beispiel als Normalschnitt des Keilwinkels $A(BF)C$.

4) Jeder Eckpunkt des Würfels erscheint als Scheitel einer dreikantigen körperlichen Ecke. Die Seiten dieser Ecke sind unter sich gleich (90°), ebenso die Winkel. Solche Ecken heissen regelmässige Ecken. Ein Körper, der lauter gleichartige regelmässige Ecken und lauter gleichartige regelmässige Flächen zeigt, heisst **regelmässig**. Der Würfel ist ein **regelmässiger Körper**.

5) Man nehme die Würfelkanten als 1 an. Wie lange ist alsdann α) eine Flächendiagonale AC und β) eine Körperdiagonale AG des Würfels.

6) Die Figur $AHGB$ ist ein Rechteck. Zwei ihrer Seiten sind Kanten, die übrigen sind Flächendiagonalen des Würfels. Ihre Diagonalen AG und BH sind Körperdiagonalen des Würfels. Von den Mittellinien verbindet eine ST die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten, die andere NP verbindet die Mittelpunkte gegenüberliegender

Tafel I jeden Körper mit doppelten oder dreifachen Längendimensionen. Erst hiernach beantworte man an der selbst gezeichneten Figur die in den Uebungen enthaltenen Fragen.

Flächen. Die vier letztgenannten Linien gehen durch den Mittelpunkt des Rechtecks und halbiren einander daselbst.

7) Mit Hülfe von 6) beweise man:

α) Eine Diagonale (Körperdiagonale) des Würfels wird von allen übrigen in ihrem Mittelpunkte getroffen; oder: Alle Diagonalen des Würfels gehen durch denselben Punkt O , welcher von den Ecken gleiche Entfernung hat (welche?).

β) Alle Linien, welche die Mitten gegenüberliegender Kanten verbinden, gehen durch den Punkt O . Der Punkt O hat von allen Kanten gleiche Entfernung (welche?).

γ) Alle Linien, welche die Mitten gegenüberliegender Flächen verbinden, gehen durch O . O hat von allen Flächen gleichen Abstand (welchen?).

8) Jede der Geraden MQ , NP , UV , welche die Mitten gegenüberliegender Flächen verbinden, steht auf den übrigen senkrecht. Diese Geraden heissen Axen des Würfels.

9) α) Den Winkel GAB der Diagonale mit der Kante zu bestimmen. β) Den Neigungswinkel AGB der Diagonale gegen die Seitenfläche zu bestimmen. (Durch Construction oder Rechnung.)

10) Den Winkel zu bestimmen, unter welchem sich zwei Diagonalen schneiden.

11) Die Mittelpunkte der sechs Seitenflächen sind Eckpunkte eines Octaeders (§ 25).

12) Das regelmässige Dreieck EBG in Fig. 4 wird durch die Diagonale FD in seinem Mittelpunkte S getroffen.

Andeutung. Jede der Diagonalebene, welche nach einander durch die drei Kanten FB , FG , FE und die bezüglich gegenüberliegenden Kanten gelegt sind, enthält die Diagonale FD . Jede solche Ebene geht aber auch durch den Mittelpunkt des Dreiecks BGE , weil sie eine Mittellinie dieses Dreiecks enthält. $FHDB$ enthält zum Beispiel die Mittellinie VB (vergl. 7 α).

13) Die Linie FS ist die Höhe der Pyramide $EBGF$.

Die Diagonalebene $FHDB$ steht senkrecht auf der Geraden EG und deshalb auch auf der Grundfläche EBG . Dasselbe gilt von den beiden andern in 12) genannten Diagonalebene und dadurch auch von der Schnittlinie FS der drei Ebenen.

14) Wenn die Länge einer Seitenkante EF der Pyramide $EBGF$ mit 1 bezeichnet wird, so ist die Grundkante $EG = \sqrt{2}$, die Mittellinie VB der Grundfläche ist $\sqrt{\frac{3}{2}}$ und die Höhe SF ist $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (SF kann auch mit Benutzung von 15) gefunden werden).

15) Die Mittellinie VB des Dreiecks EBG wird in S nach dem Verhältniss 1 : 2 getheilt. Da $VO \parallel FB$, so wird auch OF in S nach diesem Verhältniss getheilt.

16) Die Fläche MVP des einbeschriebenen Octaeders liegt auf der Ebene EBG . Die Träger der Flächen des einbeschriebenen Octaeders schneiden also den Würfel in den Diagonalen seiner Seitenflächen.

§ 25. Das Octaeder.

Man denke sich in Fig. 1 auf jeder Axe zu beiden Seiten von O zwei Punkte angenommen, welche von O gleichen Abstand haben, so kommt man zu sechs Punkten, welche die Ecken des sogenannten Octaeders (Achtflächner) sind (Fig. 3). Für die Zeichnung in Fig. 3 erhellt aus § 23, dass $OA = \frac{1}{3}OB$ und $\angle DOB = 30^\circ$. EB , FC , AD sind die Axen des Octaeders.

Uebungen.

1) α) Die Kanten des Octaeders sind gleich lang. Wie gross muss die Entfernung der Ecken von O angenommen werden, wenn die Kantenlänge gleich 1 sein soll?

β) Die Flächen des Octaeders sind regelmässige Dreiecke.

2) Die Figur $ECBF$ (einer der drei „Hauptschnitte“ des Octaeders) ist ein Quadrat. Seine Seiten sind Kanten, seine Diagonalen sind Axen des Octaeders. Seine Mittellinien verbinden die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten.

3) Durch 2) beweise man:

α) Die Linien, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten verbinden, gehen durch O .

β) Der Punkt O hat von allen Kanten gleichen Abstand. Wie gross ist dieser Abstand, wenn die Kantenlänge hier wie im Folgenden gleich 1 gesetzt wird?

4) Eine Ebene, welche durch eine Axe AD und eine Mittellinie des zu AD senkrechten Hauptschnittes gelegt ist, schneidet das Octaeder in einem Rhombus $AJDK$. Die Seiten des Rhombus sind Mittellinien von Octaederflächen. — Man berechne oder construiere ihre Länge. Die eine Diagonale AD des Rhombus ist eine Octaederaxe, die andere JK verbindet die Mitten zweier gegenüberliegender Kanten. Die Winkel des Rhombus bei J und K sind die Neigungswinkel der Flächen, welche in der Kante EC und FB zusammenstossen. Man berechne oder construiere diesen Winkel.

5) Das Octaeder ist ein regelmässiger Körper (vergl. § 24, 4).

6) Der Träger des Rhombus $JDKA$ halbiert die Kanten EC und FB senkrecht (§ 6a) und steht daher (§ 7b, 2 und 3) senkrecht auf den vier Octaederflächen, welche die Kante EC oder FB als Seite enthalten.

7) Auf den Seiten des Rhombus $AKDJ$ liegen die Mittelpunkte N , S , T , Q von vier Octaederflächen. Wie gross sind die Abstände $JN = JQ = KS = KT$?

8) Die Geraden, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Octaederflächen verbinden, gehen durch O und stehen auf den betreffenden Octaederflächen senkrecht.

Zum Beweise bemerke man, dass zum Beispiel N und T auf der Ebene $AKDJ$ liegen, welche durch die Ecken A und D der beiden Dreiecke ACE und FBD und die Mittelpunkte der Gegenseite geht.

N und T liegen auch auf der Ebene, welche durch die Ecken E und B und die Mitten ihrer Gegenseiten bestimmt ist. Sie liegen auch noch auf einer dritten Ebene, welche durch C , F und die Mitten von EA und DB geht. Alle diese Ebenen enthalten den Punkt O und stehen auf den Flächen AEC und DBF senkrecht (6). Das gleiche gilt von der Geraden NT , ihrer gemeinsamen Schnittlinie.

9) Wie gross ist der gemeinsame Abstand aller Octaederflächen von O ?

10) Die Mittelpunkte der Octaederflächen sind die Ecken eines Würfels.

Andeutung. Man denke den Körper um CF gedreht. Nach jeder Drehung von 90° fällt der Körper mit seiner frühern Lage zusammen. Dabei bewegt sich M in einem Kreise und fällt nach und nach mit N , O , P zusammen. $MNOP$ ist ein Quadrat, weil zwei zu einander senkrechte Durchmesser eines Kreises ein Quadrat bestimmen. Dasselbe beweist man für die andern Seitenflächen des von den acht Mittelpunkten bestimmten Körpers, woraus die Behauptung leicht folgt.

§ 26. Das Tetraeder.

Wenn man von den acht Ecken des Würfels vier so auswählt, dass nie zwei auf derselben Würfelkante liegen, so erhält man die Ecken eines von vier regelmässigen Dreiecken begrenzten Körpers, welcher Tetraeder (regelmässiges Tetraeder — Siehe Uebung 5 β) genannt wird.

Uebungen.

1) Die Diagonalen des Würfels stellen im Tetraeder $BDEG$ (Fig. 4) diejenigen Linien vor, welche die Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden (§ 24, 12).

2) Diejenigen Geraden, welche im Würfel die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen verbinden, gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Tetraederkanten.

3) Alle Linien in 1 und 2 gehen durch denselben Punkt O , den Mittelpunkt des Würfels.

4) Wenn die Würfelkanten 1 gesetzt werden, so sind die Tetraederkanten $\sqrt{2}$, die Linien, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten verbinden 1, die Höhen des Tetraeders (z. B. DS) sind $\frac{2}{3}$ von der Würfeldiagonale, also $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Der Abstand des Punktes O von den

Tetraederecken ist gleich der halben Würfeldiagonale oder $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Der Abstand des Punktes O von den Flächen des Tetraeders (OS) ist der dritte Theil von der halben Würfeldiagonale (OF) oder $\frac{1}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Der Punkt O heisst der Mittelpunkt des Tetraeders. (Vergleiche auch § 24, 14.)

5) α) Der Träger des Dreiecks DBV ist eine Diagonalebene des Würfels und steht auf EG senkrecht. DBV ist deshalb der Normal-schnitt des Keilwinkels $D(EG)B$, welcher von zwei Tetraederflächen gebildet wird. Ebenso leicht sieht man, dass die andern Winkel des Dreiecks Neigungswinkel von Tetraederkanten gegen Tetraederflächen sind. Man berechne die Seiten und Winkel des Dreiecks DBV .

β) Das Tetraeder ist ein regelmässiger Körper.

6) Auf den vier Flächen des Tetraeders liegen auch vier Flächen desjenigen Octaeders, welches dem Würfel einbeschrieben ist (§ 24, 16). Daraus folgt eine andere Entstehungsweise des Tetraeders: Man wähle von den acht Flächen eines regelmässigen Octaeders vier so aus, dass nie zwei derselben in einer Octaederkante zusammenstossen. Die Träger dieser vier Flächen bestimmen durch ihre Schnittlinien und Schnittpunkte die Kanten und Ecken eines regelmässigen Tetraeders.

§ 27. Pyramidenwürfel und Pyramidenoctaeder.

Wenn man über den Flächen des Würfels oder des Octaeders senkrechte Pyramiden von gleicher Höhe construirt, so entsteht der Pyramidenwürfel oder das Pyramidenoctaeder. Die Spitzen der Pyramiden liegen auf den Geraden, welche die Mittelpunkte gegenüberliegender Flächen verbinden. In Figur 5 ist $VZ = \frac{1}{4}EF$ angenommen. In Figur 6 ist die Spitze M der über die Fläche ABC gestellten Pyramide durch den Schnitt zweier Geraden RG und SH gefunden. $OR = OS$ ist doppelt so gross als OB oder OC . Die Punkte G und H sind die Mittelpunkte der Kanten AC und AB . Zur Erleichterung der Zeichnung bemerke man, dass in Fig. 6 die Spitzen der Pyramiden Ecken eines Würfels sind. Die Beweise zu dem über Fig. 6 Ausgesagten werden durch die Uebungen vermittelt.

Uebungen.

1) (Fig. 5) α) Wie gross ist unter der Voraussetzung $EF = 1$ die Seitenkante ZF . β) Wie gross sind die Winkel des Dreiecks FZG .

2) (Fig. 5) α) Wie gross ist der Winkel VSZ , Neigungswinkel der Fläche FZG gegen die Würfffläche $EFGH$. β) Wie gross ist der Neigungswinkel der Flächen FGZ und FGX .

3) (Fig. 5) Der Träger einer Pyramidenfläche FGZ hat mit den drei Axenrichtungen OX , OY , OZ drei Punkte gemein. Die Abstände dieser Punkte verhalten sich wie $2 : 1 : \infty$ ($\infty =$ Unendlich gross).

4) Die Ebene $RG O$ in Fig. 6 halbt die Kante AC senkrecht. Sie enthält daher die von O auf die Octaederfläche ABC gefällte Normale. Diese Normale muss also von der Geraden RG geschnitten werden. In welcher Entfernung von O geschieht dies ($AB = 1$)?

Andeutung. Man berechne zuerst die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks $G O R$ und daraus den Winkel $O G R$. Aus dem Dreieck $O G B$, dessen Seiten ebenfalls bekannt sind, rechne man den Winkel $O G B$,

dessen Nebenwinkel der Winkel GOM ist. Nun kann man in dem Dreieck GOM die Seite OM berechnen.

5) Aus der Beantwortung von 4 geht auch hervor, dass die von O auf ABC gefällte Normale von den Geraden RG und SH in demselben Punkte getroffen wird. Die Geraden RG und SH treffen sich also in der Spitze einer über ABC stehenden senkrechten Pyramide. Welches ist die Höhe dieser Pyramide?

6) α) Welche Länge hat die Kante AM ($AB = 1$)? β) Wie gross sind die Winkel des Dreiecks AMB ?

Andeutung zu α). Aus dem Dreieck GOM (Siehe Andeutung zu Uebung 4) kann man GM und nun aus dem Dreieck AGM die Seite AM finden.

7) Wie gross ist α) der Neigungswinkel von ACB und ACM , β) der Neigungswinkel von ACM und ACN ?

8) Der Träger der Fläche ABM schneidet die Axen des Octaeders in 3 Punkten, deren Abstände von O sich wie $1 : 1 : 2$ verhalten.

9) Einen Pyramidenwürfel zu zeichnen, bei welchem je zwei in einer Würfelkante zusammenstossende Flächen in dieselbe Ebene fallen.

Andeutung. Die Lösung dieser Aufgabe besteht in der Construction des Rhombendodekaeders nach § 28. Aufgabe 10 führt zu derselben Körperform.

10) Einen Pyramidenoctaeder zu zeichnen, bei welchem je zwei in einer Octaederkante zusammenstossende Flächen in dieselbe Ebene fallen.

§ 28. Rhombendodekaeder.

Durch die Mitten der Octaederkanten CA , CB , CD , CE in Fig. 7 lege man Gerade mit den Axen EB und AD parallel. Die Schnittpunkte dieser Geraden bilden das Quadrat $MPQN$. Wiederholt man dieselbe Construction auf der untern Seite, so erhält man vier weitere Punkte. Die sechs Ecken des Octaeders und die acht neuen Punkte sind die Ecken des sogenannten Rhombendodekaeders.

Uebungen.

1) Man beweise zunächst, dass $KGHJ$ ein Quadrat ist. Sodann bemerke man, dass die Linien, welche nach dem Vorhergehenden durch die Ecken des Quadrats gezogen sind, in der Ebene des Quadrats liegen und ein umbeschriebenes Rechteck bilden. Dieses Rechteck wird als Quadrat erkannt, weil die Mittellinien KH und JG gleich sind. Man hat auch $NM = KH = \frac{1}{2}EB$.

2) Man beweise, dass $NCMA$ ein Rhombus ist.

Andeutung. Die Diagonalen sind senkrecht und halbiren einander.

3) Wie gross sind die Diagonalen und Seiten des Rhombus $NCMA$ (Octaederkante $= 1$)?

4) Wie gross sind die Winkel dieses Rhombus?

5) Wie gross ist der gemeinsame Abstand aller Flächen des Rhombendodekaeders von O ?

Andeutung. So gross wie der Abstand der Octaederkanten von O .

6) Wie weit sind die Scheitel $M, N \dots$ der dreikantigen Ecken von O entfernt?

Andeutung. Man berechne diese Entfernung als die halbe Diagonale eines Würfels.

7) Wie weit sind die Scheitel $A, B \dots$ der vierkantigen Ecken von O entfernt?

§ 29. Combinationen.

Wenn ein regelmässiges Octaeder und ein Würfel denselben Mittelpunkt haben und ihre Axen paarweise zusammenfallen, so können sie einander durchdringen und auf diese Weise einen zusammengesetzten Körper (Combination) bilden. Man soll auf diese Weise

1) Die Ecken eines Octaeders durch die Flächen eines Würfels abstumpfen (Fig. 8).

2) Die Ecken eines Würfels durch die Flächen eines Octaeders abstumpfen (Fig. 9).

Andeutung zur Zeichnung. 1) Man nehme den Punkt G auf einer Octaederkante beliebig an. Die Seiten der Abstumpfungsfläche $GKJH$ sind mit den Seiten des Hauptschnitts $EABD$ parallel. Um vom Punkte G auf den Punkt Q zu kommen, ziehe man GQ parallel CA .

2) Man nehme den Punkt P auf einer Würfelkante beliebig an. Die Seiten der Abstumpfungsfläche PMN sind mit Diagonalen von Würfelflächen parallel (vergl. § 24, 16). Um vom Punkte P zum Punkte R zu gelangen, ziehe $PR \parallel EF$.

Uebungen.

1) Der Abstand der Abstumpfungsflächen von den Octaederecken in Fig. 8 sei x . Wie gross sind

- α) die Diagonalen und Seiten der Abstumpfungsflächen;
- β) die von den Octaederkanten übrig bleibenden Stücke?

2) Wie gross muss x genommen werden, wenn

- α) die sechsseitigen Flächen regelmässig sein sollen;
- β) die Octaederkanten ganz verschwinden sollen?

3) Der Abstand der Abstumpfungsflächen von den Würfecken in Fig. 9 sei x . Wie gross sind

- α) die Seiten der Abstumpfungsflächen;
- β) die von den Würfelkanten abgeschnittenen Stücke (OF) und die von ihnen übrig bleibenden Stücke (MO)?

Andeutung. Wenn man EP mit a bezeichnet, so ist nach § 24, 14 $MP = a \cdot \sqrt{2}$ und $x = a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$. Man berechne aus der zweiten Gleichung a und setze ein.

- 4) Wie gross muss x und EP genommen werden, damit
- α) die sechsseitigen Flächen regelmässig werden;
 - β) die Würfelkanten ganz verschwinden?

§ 30. Regelmässiges Icosaeder.

Wenn man von den 24 Ecken der Combination in Fig. 8 12 Ecken so auswählt, dass nie zwei derselben auf einer Kante des Körpers liegen, so erhält man die Eckpunkte des in Fig. 10 dargestellten Körpers, welcher von 20 Dreiecken begrenzt ist und Ikosaeder (Zwanzigflächner) heisst. Wenn die Entfernung CZ so genommen wird, dass OC in Z stetig getheilt und OZ der grössere Abschnitt ist, so ist das Ikosaeder regelmässig. Vergleiche die Uebungen.

Uebungen.

- 1) Die Länge CZ sei mit x bezeichnet und OC sei gleich 1 angenommen. Man berechne alsdann
- α) die Kanten $GJ = RT = PM \dots$, welche mit einer der Axen parallel laufen;
 - β) die Abstände $CG = CJ = EU \dots$;
 - γ) die Abstände $CR = AP = EG \dots$;
 - δ) die Kanten $RJ = JP = PR \dots$, welche auf Flächen des Octaeders liegen;
 - ϵ) den gemeinsamen Abstand (z. B. OJ) aller Ecken von O .

Andeutung zu δ). Aus Dreieck RCJ , welches bei C den Winkel von 60° hat, ergibt sich $RJ^2 = RC^2 + CJ^2 - RC \cdot CJ$.

- 2) Aus 1) geht hervor, dass der Körper im Allgemeinen von acht regelmässigen und zwölf gleichschenkligen Dreiecken begrenzt ist. Wie gross muss x genommen werden, wenn alle Kanten des Körpers gleichlang und daher alle Flächen des Körpers regelmässig sein sollen?

Andeutung. Man setze die Werthe von $\overline{GJ}^2$ und $\overline{RJ}^2$ aus 1 α) und δ) einander gleich. Dann ergibt sich die Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$, welche mit der Proportion $x : 1 - x = 1 - x : 1$ identisch ist. Daraus sieht man, dass OC in Z stetig getheilt ist.

- 3) In § 70, 10 wird angedeutet, wie man beweist, dass der Körper unter der Voraussetzung von 2) regelmässig ist. Zugleich wird hervorgehen, dass alle Kanten unter sich und ebenso alle Flächen unter sich die gleiche Entfernung haben.

- α) Wie gross sind — die Richtigkeit des Gesagten vorausgesetzt — diese Entfernungen?
- β) Wie gross ist in diesem Falle die gemeinsame Entfernung der Ecken von O , welche für einen beliebigen Werth x von CZ in 1 ϵ) berechnet wurde?

§ 31. Regelmässiges Dodecaeder.

Man wähle unter den 24 Flächen des Pyramidenwürfels (Fig. 5) 12 so aus, dass nie zwei derselben in einer Kante des Körpers zusammenstossen. Nimmt man als erste Fläche EZF , so folgen die Uebrigen: HZG , FGX , BCX , BFY , AEY , und die Flächen, welche den genannten gegenüberliegen. Denkt man sich, dass diese Flächen bis zum gegenseitigen Schnitte ausgebreitet werden, während die Uebrigen verschwinden, so entsteht das Pentagondodekaeder. Dasselbe ist, wie später gezeigt wird, ein regelmässiger Körper, wenn die Höhe der Pyramiden in Fig. 5, also die Länge VZ so gewählt wird, dass ZO in V stetig getheilt ist. (Siehe die Uebungen.)

Andeutung zur Zeichnung. Die Würfecken gehören auch dem neuen Körper an. Die acht weitem Ecken finden sich auf folgende Weise: Man ziehe durch Z in Fig. 5 die Richtung der neuen Kante (MN in Fig. 11) parallel mit der von links nach rechts gehenden Axe. Alsdann ziehe man von X über die Mitte S der Würfelkante FG . Beide Linien schneiden sich in einer Ecke des neuen Körpers (N in Fig. 11). In Fig. 11 ist noch das Auffinden des Eckpunktes U angedeutet. Beim Aufsuchen der übrigen Ecken benütze man zur Erleichterung das Abmessen von ZN und XU .

Uebungen.

- 1) Unter der Annahme $OV = 1$ und $ZV = x$ berechne man
 - α) SX (aus dem rechtwinkligen Dreieck SLX);
 - β) NS (aus der Proportion $NS : SX = NJ : SL$);
 - γ) JS (aus der Proportion $JS : LX = NJ : SL$).
- 2) Ferner berechne man
 - α) die Kante NF aus dem rechtwinkligen Dreieck FNS ;
 - β) die Hälfte ZN der Kante MN , welche der Differenz $VS - JS$ gleich ist;
 - γ) den Abstand ON aus dem rechtwinkligen Dreieck OZN .
- 3) Die Länge x so zu bestimmen, dass alle Kanten des Körpers gleich lang sind.

Andeutung. Man setze die Quadrate der Kanten NF und NM (2, α und β) einander gleich und erhält: $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ oder $x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Das obere Zeichen führt auf $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, welcher Werth zu verwerfen ist, weil sonst ZN negativ würde. Das untere Zeichen gibt $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Alsdann ist die Proportion

$$1 + x : 1 = 1 : x$$

erfüllt und man sieht, dass OZ in O stetig getheilt ist. Ueber die Construction von OZ siehe die ebene Geometrie I, § 84d.

4) Unter der Voraussetzung, dass x nach 3) bestimmt sei, soll man den Abstand ON berechnen.

Andeutung. Man findet ON gleich dem Abstände OF , d. h. gleich der halben Würfeldiagonale, woraus hervorgeht, dass für diesen Fall alle Ecken des Körpers von O denselben Abstand haben.

5) In § 70, 11 wird bewiesen, dass der Körper in Fig. 11 regelmässig ist, wenn x den 3) berechneten Werth hat.

§ 32. Abbildung des Kreises.

In Fig. 12 seien OG , OK und Od bezüglich die Richtungen der Axen OX , OY , OZ , von welchen in § 23 gehandelt wird. In der Ebene XOZ ist ein Kreis um O gezogen und $A, B, C \dots$ seien die Eckpunkte eines diesem Kreise einbeschriebenen regelmässigen Zwölfecks. Man soll dies Zwölfeck um AG drehen, bis es in die Ebene XOY zu liegen kommt.

Andeutung zur Zeichnung. Ziehe durch die Punkte $u, v \dots$ Parallelen zur Axe OY . Mache $um = ub = \frac{1}{3}uM$ u. s. w., so sind die Abbildungen der Zwölfeckpunkte gefunden. Man spart das öftere Abmessen, wenn man bedenkt, dass $Mm \parallel Ll \parallel Kk \dots$

Uebungen.

1) Die Punkte $A, b, c \dots$ liegen auf einer Ellipse, welche eben die Abbildung des in die Ebene XOY gelegten Kreises ist. iN ist die Abbildung der Tangente JN des Kreises in dem Punkte J . Diese Gerade iN ist nach § 18 Tangente der Ellipse im Punkte i .

2) Nimmt man auf der Geraden OK einen Punkt an, um ihn mit den Ecken A, b, c des Zwölfecks zu verbinden, so hat man die Abbildung einer zwölfseitigen geraden Pyramide erhalten.

3) Auf dieselbe Weise zeichne man mit Zugrundlegung des regelmässigen Sechsecks

- α) eine sechsseitige gerade Pyramide;
- β) eine sechsseitige Doppelpyramide;
- γ) ein sechsseitiges gerades Prisma.

4) Ferner zeichne man

- α) einen geraden Kreiskegel;
- β) einen abgestumpften Kreiskegel;
- γ) einen geraden Kreiscylinder.

V. Abschnitt.

Normalprojection; Grundriss und Aufriss.

§ 33. Grund- und Aufriss.

a) (Tab. II, Fig. 1.) Man denke sich eine horizontale Ebene α (Grundrissebene) und eine vertikale Ebene β (Aufrissebene), welche sich in der Geraden AA' (Axe) schneiden. Von einem Punkte M , welcher auf keiner dieser Ebenen gelegen ist, fälle man die Senkrechten MP und MQ auf α und β . P heisst der Grundriss und Q der Aufriss des Punktes M . Die Ebene QMP trifft die Axe in einem Punkte S . Die Strecken SP und SQ stehen auf der Axe senkrecht und messen die senkrechten Abstände des Punktes M von der Aufrissebene und der Grundrissebene.

Beweis. MP steht auf der Ebene α und nach § 6 a Anm. auch auf der Axe senkrecht. Ebenso zeigt man, dass MQ auf der Axe senkrecht ist. Daraus folgt, dass die Ebene PMQ und die Axe senkrecht gegen einander liegen und sich treffen. Die Strecken SP und SQ sind nach § 6 a und Anm. auf der Axe senkrecht. Der Winkel PSQ stellt nun den Neigungswinkel der Ebenen α und β vor und ist recht (Annahme). Da ausserdem die Winkel bei P und Q im Viereck $PMQS$ recht sind, so wird diese Figur als Rechteck erkannt und die Strecken SP und SQ sind gleich parallel mit QM und PM .

b) Gibt man der Aufrissebene eine Vierteldrehung um die Axe in der Richtung des Pfeiles, so fällt sie mit der Grundrissebene zusammen. Die Punkte P und Q liegen dann in derselben Normalen zur Axe.

c) Man denke sich nach b) die Grundrissebene und die Aufrissebene in der Fläche des Papiers zusammenfallend. Nimmt man (Fig. 2) auf irgend einer Normalen zur Axe die Punkte P und Q beliebig an, so stellen sie immer den Grundriss und Aufriss eines Punktes M im Raume vor. Man denke zu diesem Zwecke die Aufrissebene in ihre alte Lage (Fig. 1) zurückgedreht, so werden die drei Punkte P , S und Q ein Parallelogramm bestimmen und der vierte Eckpunkt desselben ist eben jener Punkt M .

Beweis. Nach der Voraussetzung stehen SP und SQ (Fig. 1) auf der Axe senkrecht. PSQ ist also der (rechte) Neigungs-

winkel beider Ebenen α und β . Daraus folgt z. B., dass QS auf der Ebene α senkrecht steht. Das gleiche gilt nach § 7a von der parallelen Strecke MP . Ebenso zeigt man, dass MQ auf der Ebene β senkrecht steht.

d) Wenn Punkte auf einer Geraden a liegen, so liegen ihre Grundrisse auch auf einer Geraden, welche der Grundriss von a heisst. Analog kommt man auf diejenige Gerade, welche der Aufriss von a genannt wird.

Uebungen.

1) Die Ebenen α und β (Fig. 1) theilen den Raum in vier Keilwinkel I, II, III, IV. In Fig. 2 sind die vier Punkte M, M_1, M_2, M_3 , deren Lage in Fig. 1 versinnlicht ist, durch Grund- und Aufriss dargestellt. Die Richtungen SP und $S'P'$ sind entgegengesetzt. Man bezeichnet dies durch das Vorzeichen nach § 62 der ebenen Geometrie: $SP = +2$, $S_1P_1 = -2$. Desgleichen sind SQ und S_2Q_2 entgegengesetzt: $SQ = +3$, $S_2Q_2 = -3$. (Man vergl. die Figuren 1 u. 2.) In der Grundrissebene wird also die Richtung nach vorn und in der Aufrissebene die Richtung nach oben als positiv genommen. In Fig. 2, wo beide Ebenen sich decken, hat man:

$$SP = +2, SQ = +3, S_1P_1 = -2, S_1Q_1 = +3, S_2P_2 = +2, S_2Q_2 = -3, S_3P_3 = -2, S_3Q_3 = -3.$$

Man stelle in derselben Weise nach Fig. 2 Punkte dar, für welche

	α	β	γ	δ	ε	ζ
$SP =$	+ 3	- 1,8	- 2,8	- 1,4	+ 0,3	+ 3,2
$SQ =$	- 2,4	+ 2,9	- 3	+ 1,4	+ 3	- 0,5

und gebe an, in welchen der vier Keilwinkel I, II, III, IV diese Punkte liegen. Man versinnliche auch die Lage der Punkte durch eine nach Muster von Fig. 1 gefertigte Zeichnung. Die Längenzahlen, welche in der Tabelle angegeben sind, sollen Centimeter bedeuten.

2) Man stelle die Punkte dar, für welche

	α	β	γ	δ	ε
$SP =$	0	+ 3	0	- 0,7	0
$SQ =$	+ 2	0	- 3	0	0

und beschreibe die Lage der Punkte.

§ 34. Der Würfel.

Uebungen.

Fig. 3 stellt Grundriss und Aufriss eines Würfels vor. In Fig. 3 u. 4 sind die Punkte des Grund- und Aufrisses durch kleine Buchstaben bezeichnet. Die zugehörigen Raumpunkte nennen wir mit den zugehörigen

grossen Buchstaben.* Das Verständniss der Figur wird durch die folgenden Uebungen vermittelt.

1) Welche Kanten sind

- α) senkrecht auf der Grundrissebene;
- β) senkrecht auf der Aufrissebene;
- γ) parallel zur Axe?

Was lässt sich über die Grundrisse und Aufrisse dieser Kanten sagen?

Andeutung. Die Kante AE steht senkrecht auf der Grundrissebene. Ihr Grundriss ae erscheint als Punkt; ihr Aufriss $a'e'$ liegt in einer zur Axe senkrechten Geraden.

2) Wie erkennt man im Grundriss und Aufriss

- α) das Oben und Unten;
- β) das Vorn und Hinten;
- γ) das Rechts und Links?

Andeutung. α) Im Aufriss erkennt man das Oben und Unten aus der Anschauung. Die Grundrisse a und e dagegen liegen in demselben Punkte, aber der Punkt A wird dadurch als der obere erkannt, dass der zu dem oberen Punkt gehörige Buchstabe a vorgeschrieben ist. Im Grundriss wird also das Oben und Unten nur bei Punkten zu erkennen sein, deren Grundrisse zusammenfallen und zwar durch die Bezeichnung.

3) Welche Bedingungen müssen der Aufriss und Grundriss erfüllen, wenn die Gerade

- α) senkrecht auf der Grundrissebene sein soll;
- β) senkrecht auf der Aufrissebene sein soll;
- γ) parallel zur Axe sein soll?

Andeutung. α) Der Grundriss muss ein Punkt sein, der Aufriss muss auf der Axe senkrecht stehen.

4) Man soll von den folgenden Würfel Flächen den Aufriss und Grundriss aus Fig. 3 ablesen

- α) die Flächen, welche parallel zur Grundrissebene sind;
- β) die Flächen, welche parallel zur Aufrissebene sind;
- γ) die Flächen, welche senkrecht zur Axe sind.

5) Die Form von Aufriss und Grundriss der Figuren in 4) anzugeben.

Andeutung. Die Flächen 4α) erscheinen im Aufriss zur Strecke verkürzt und im Grundriss in ihrer wirklichen Gestalt.

6) Welche Bedingungen müssen der Aufriss und Grundriss eines ebenen Flächenstückes erfüllen, wenn dasselbe

* Das von der Bezeichnung der Punkte Ausgesagte gilt für alle folgenden Figuren der Tafel. In manchen Figuren sind die kleinen Buchstaben, welche Aufriss und Grundriss bezeichnen, durch Striche unterschieden (Fig. 4), in andern Figuren ist die Bezeichnung des Aufrisses und Grundrisses nicht verschieden. In Fig. 9 zum Beispiel gehört der Buchstabe b' zum Grundriss und Aufriss desselben Punktes B' im Raume.

α) parallel zur Grundrissebene sein soll;

β) parallel zur Aufrissebene sein soll;

γ) senkrecht zur Axe sein soll?

Andeutung. α) Die Figur hat im Grundriss die wahre Gestalt und erscheint im Aufriss als Strecke.

7) Man lese die Diagonalen der Flächen in 4), ihre Grundrisse und Aufrisse. Man gebe die Lage dieser Linien gegen die Grundrissebene, die Aufrissebene und die Axe an.

Andeutung. AC ist die Diagonale der obern Würfffläche, welche von vorn und links nach hinten und rechts geht. Dieselbe ist mit der Grundrissebene parallel. Ihr Aufriss $a'c'$ ist mit der Axe parallel.

8) Welche Bedingungen müssen Grundriss und Aufriss einer Geraden erfüllen, wenn dieselbe

α) parallel mit der Grundrissebene sein soll;

β) parallel mit der Aufrissebene sein soll;

γ) senkrecht zur Axe sein soll?

Andeutung. α) Der Aufriss muss parallel mit der Axe sein. Der Grundriss kann beliebige Richtung haben. (Vergl. auch 3 β .)

9) Von den Diagonalebene (Diagonalfächen), ihren Grundrissen und Aufrissen die Lage gegen die Bildebenen, sowie die Form anzugeben.

Andeutung. $AEGC$ ist ein Rechteck, dessen Ebene senkrecht auf der Grundrissebene steht. Der Grundriss $aegc$ stellt eine Strecke vor, der Aufriss ist das Quadrat $a'e'g'c'$ und stellt nicht die wahre Gestalt der Diagonalfäche dar.

10) Auf jeder Diagonalebene in 9) die Körperdiagonalen zu nennen. Ihre Lage sowie die Lage ihrer Grundrisse und Aufrisse anzugeben.

Andeutung. Auf $AEGC$ liegen die Diagonalen AG und CE . AG geht von vorn, oben und links nach hinten, unten und rechts. Der Grundriss ag geht von vorn und links nach hinten und rechts. Der Aufriss $a'g'$ geht von oben und links nach unten und rechts. Vergl. Aufgabe 2.

11) XX' , Fig. 4, sei eine im Grundriss auf die Axe senkrecht gezogene Gerade. Man betrachte sie als eine neue Axe und construire zum alten Grundriss einen neuen Aufriss des Würfels (Seitenriss des Würfels).

Andeutung. Um zu a den zugehörigen Punkt a'' im Seitenriss zu finden, fälle man as senkrecht auf die Axe des Seitenrisses und mache $sa'' = pa'$, da beide Strecken die Höhe des Punktes A über der Grundrissebene angeben.

§ 35. Uebungen über Wendungen von Körpern und Flächen. — Schnittfiguren von Körpern und Flächen.

1) Wenn man den Würfel in Fig. 3 um die auf der Aufrissebene senkrechte Axe EH dreht, so beschreiben

α) die Ecken des Würfels (ausser E und H) Kreise, deren Mittelpunkte auf der Drehaxe liegen und deren Ebenen daher auf der Grundrissebene senkrecht stehen;

- β) die Aufrisse dieser Würfecken beschreiben Kreise, deren Mittelpunkt der Punkt $e' h'$ (Fig. 3) des Aufrisses ist;
- γ) die Grundrisse dieser Ecken bewegen sich in Geraden, welche zur Axe parallel sind.

Eine solche Drehung des Würfels stellt sich also in der Zeichnung als Drehung des Aufrisses dar.

2) Nach 1) eine Drehung des Würfels um 30° auszuführen.

3) Fig. 5 und 6 stellen die Ausführung dieser Drehung dar. Nur ist hier der gedrehte Aufriss (der gedrehte Würfel) nach rechts geschoben, damit die Figuren aus einander fallen.

4) Wie bewegen sich die Würfecken, ihre Grundrisse und Aufrisse, wenn der Würfel (Fig. 3) eine Drehung um die Axe AE macht. (Drehung des Grundrisses.)

5) Nach 4) eine Drehung des Würfels um 30° auszuführen.

6) In Fig. 7 ist eine Drehung des Würfels in Fig. 6 um eine durch C senkrecht zur Grundrissebene gelegte Axe dargestellt. Die Grösse der Drehung beträgt 30° . Um das Zusammenfallen der Figuren zu vermeiden, ist ausserdem der Grundriss (Würfel) nach rechts geschoben.

7) Im Grund- und Aufriss soll man zeichnen:

- α) ein gerades sechsseitiges Prisma, dessen Grundfläche regelmässig und mit der Grundrissebene parallel ist;
- β) eine gerade sechsseitige Pyramide, deren Grundfläche regelmässig und mit der Grundrissebene parallel ist.

An diesen Figuren sollen die Wendungen ausgeführt werden, die in Fig. 5, 6, 7 für den Würfel dargestellt sind.

8) Man nehme in 7 statt der Sechsecke regelmässige Zwölfecke zur Grundfläche und führe das in 7 Aufgegebene durch.

9) Im Grundriss und Aufriss zeichne man

- α) einen geraden Kreiscylinder, dessen Grundfläche parallel zur Grundrissebene ist;
- β) einen geraden Kreiskegel, dessen Grundfläche parallel zur Grundrissebene ist.

An diesen Figuren sollen die Wendungen wie in Fig. 5, 6, 7 ausgeführt werden.

Andeutung. Verfahre wie in 8), nur verbinde nach der Wendung die Endpunkte des Zwölfecks nach dem Augenmaasse durch eine Curve (Ellipse).

10) Die Strecken ab in Fig. 8 stellen Grund- und Aufriss einer Strecke im Raume dar. Man drehe den Grundriss so lange um den Punkt b , bis dieser Grundriss mit der Axe und dadurch die Gerade im Raume mit der Aufrissebene parallel ist. Der neue Aufriss ba' in Fig. 8 stellt die wirkliche Länge der Strecke dar.

11) Die Dreiecke abc in Fig. 9 stellen Grund und Aufriss eines Dreiecks im Raume dar. Man drehe den Aufriss um den Punkt a so weit, dass der Aufriss ab in die zur Axe parallele Lage ab' kommt und dadurch die entsprechende Seite des Dreiecks im Raume mit der Grundrissebene parallel ist.

12) Die Dreiecke $ab'c'$ in Fig. 10 stellen Grund- und Aufriss eines Dreiecks im Raume vor, dessen eine Seite mit der Grundrissebene parallel ist. Man drehe den Grundriss dieses Dreiecks soweit um den Punkt a , dass dieselbe Seite senkrecht zur Aufrissebene zu stehen kommt. Die neue Lage von Grund- und Aufriss des Dreiecks ist mit $ab''c''$ bezeichnet.

13) Die Dreiecke $ab''c''$ in Fig. 11 stellen Grund- und Aufriss eines Dreiecks im Raume dar, dessen eine Seite senkrecht auf der Aufrissebene ist. Dieses Dreieck erscheint deshalb im Aufriss als eine Strecke. Man drehe den Aufriss um den Punkt (a, b'') so lange, bis ersterer mit der Axe parallel und daher die Ebene des Dreiecks im Raume mit der Grundrissebene parallel ist. Der neue Grundriss $ab''c''$ stellt alsdann die wirkliche Gestalt des Dreiecks vor.

14) Durch die Aufeinanderfolge der Operationen in 11, 12, 13 ist die wahre Gestalt des in Fig. 9 durch den Grund- und Aufriss abc gegebenen Dreiecks gefunden.

15) Fig. 12 stellt eine fünfseitige Pyramide im Grund- und Aufriss vor. Durch diesen Körper soll ein Schnitt gelegt werden, der senkrecht zur Aufrissebene ist und deshalb im Aufriss zur Linie verkürzt erscheint. Der Träger dieses Aufrisses der Schnittfigur sei die Gerade XY . Die Ecken der Schnittfigur haben ihre Aufrisse in den Schnittpunkten von XY mit den Geraden, welche die Aufrisse der Pyramidenkanten darstellen. Man construire zu diesem Aufriss den Grundriss.

16) Man bestimme die wahre Gestalt der Schnittfigur in Aufgabe 15 nach Aufgabe 13.

Andeutung. Vergleiche Fig. 13.

17) In Fig. 14 ist ebenfalls der Schnitt einer fünfseitigen Pyramide mit einer auf der Aufrissebene senkrechten Fläche dargestellt. Durch den Punkt I der Schnittfigur ist auf derselben eine Gerade IL mit der Aufrissebene parallel gezogen. Man denke sich nun den Schnitt um diese Gerade als Axe gedreht. Wie bewegen sich alsdann die Eckpunkte der Schnittfigur und ihre Aufrisse.

Antwort. Die Eckpunkte der Schnittfigur beschreiben Kreise, deren Ebenen auf der Aufrissebene senkrecht sind. Ihre Aufrisse beschreiben Geraden, die auf dem Aufriss ig der Drehaxe senkrecht stehen.

18) Welches ist der Radius eines der in der Antwort zu 17 genannten Kreise.

Antwort. Die Radien sind die Entfernungen der Eckpunkte von der Drehaxe. Dieselben können dem Grundrisse der Figur entnommen werden. ll' im Grundriss (Fig. 14) stellt zum Beispiel den Radius vor, welcher dem Eckpunkte L der Schnittfigur zugehört.

19) Die in 17 besprochene Drehung so weit auszuführen, dass die Schnittfigur mit der Aufrissebene parallel ist. Man gebe die Gestalt des neuen Aufrisses an, welche zugleich die wahre Gestalt der Schnittfigur ist.

Andeutung. ll im Aufriss (Fig. 14) ist senkrecht auf gi und

von derselben Länge wie ll' im Grundriss. l ist die neue Lage für den Aufriss des Punktes L der Schnittfigur. $g l f i h$ ist die wahre Gestalt dieser Schnittfigur.

20) Die in Aufgabe 7 und 8 gezeichneten Körper durch Flächen zu schneiden, welche senkrecht auf der Aufrissebene sind.

21) Den geraden Kreiskegel in Fig. 15 und 16 durch eine Fläche zu schneiden, welche senkrecht auf der Aufrissebene steht.

α) Die Schnittebene sei mit keiner Kegelkante parallel. Dies ist der Fall in Fig. 15, wo die Gerade XY den Aufriss der Schnittfigur enthält.

Andeutung. Die Gerade c' (d' , g') ist der gemeinsame Aufriss zweier Kegelkanten. Man construiren deren Grundrisse cd und cg . Der Punkt (m' n') ist der gemeinsame Aufriss von zwei Punkten des zu bestimmenden Schnittes. Man construiren die Grundrisse dazu.

Zur Anordnung der Kanten nehme man ein regelmässiges Zwölfeck auf der Grundfläche des Kegels an.

β) Der Schnitt sei parallel mit einer einzigen Kegelkante, das heisst mit der Ebene, welche den Kegel längs dieser Kante berührt. Dies ist in Fig. 16 der Fall, wo die Gerade XY , welche den Aufriss der Schnittfigur enthält, parallel zur Kante CA ist. Die Ausführung ist derjenigen von α) entsprechend.

γ) Der Schnitt sei parallel mit der durch zwei Kegelkanten gelegten Ebene. Dies ist der Fall, wenn die Gerade XY eine der Kegelkanten CA und CB trifft, der andern aber in ihrer Verlängerung über den Scheitel hinaus begegnet. Die beiden Kegelkanten, mit denen die Ebene des Kegelschnittes parallel ist, haben ihren Aufriss mit der Geraden XY parallel.

22) Den Kegel, Fig. 17, durch eine Fläche zu schneiden, welche senkrecht auf der Grundrissebene steht.

Andeutung. 1) Die schneidende Ebene erscheint im Grundriss zur Linie (XY in Fig. 17) verkürzt. cd ist der Grundriss einer Kegelkante. Man construiren den Aufriss dazu. m ist der Grundriss eines Punktes der Schnittfigur. Man suche den zugehörigen Aufriss m' . 2) Man kann den Schnitt auch auf folgende Art bestimmen: Die Gerade $i' h'$ enthält den Aufriss eines Parallelkreises auf dem Kegelmantel. Man construiren den Grundriss dazu. Dieser Grundriss schneidet XY in den Punkten p und q , welche Grundrisse von zwei Punkten des Kegelschnittes sind. Construiren die Aufrisse dieser Punkte.

23) Man soll die wirkliche Gestalt der Schnittcurven in 21 α , β und γ bestimmen.

Andeutung. Man kann die Aufgabe auf zwei Weisen lösen. Die Figuren 12, 13 und 14 stellen diese beiden Methoden dar.

Anmerkung. Der Kegelschnitt in 21 α ist nach § 20 eine Ellipse, der in 21 β eine Parabel und der in γ eine Hyperbel. Man erkennt aus den Constructionen 21 α und β dass die Gerade st in Fig. 15 und die Gerade sa in Fig. 16 Symmetrieachsen der betreffenden

Kegelschnitte sind. Diese Symmetrieaxe liegt jedesmal in derjenigen Ebene CAB , welche durch die Axe des Kegels geht und senkrecht auf der Ebene des Schnittes steht. Dasselbe gilt bei dem in γ entstehenden Kegelschnitt.

24) Der Kegelschnitt der Fig. 17 (Aufg. 22) erscheint im Aufriss in der wahren Gestalt, weil die Ebene des Schnittes mit der Aufrissebene parallel ist. Der Schnitt ist eine Hyperbel, denn seine Ebene ist mit den Kegelkanten CA und CB parallel. Aus der Construction geht hervor, dass $s o'$ eine Symmetrieaxe der Hyperbel ist (§ 20). Dieselbe liegt in der Ebene, welche die Axe des Kegels enthält und auf der Ebene der Hyperbel senkrecht steht.

§ 36. Uebungen.

1) Eine Gerade AB ist durch die Punkte A und B in Grund- und Aufriss bestimmt (Fig. 18). Man soll diejenigen Punkte bestimmen, in welchen die Grundrissebene und die Aufrissebene von der Geraden geschnitten werden (Grundschnitte der Geraden).

Andeutung. Der Schnitt h der Geraden mit der Grundrissebene (Horizontalgrundschnitt) ist derjenige Punkt der Geraden, dessen Aufriss h' auf der Axe liegt. Aehnlich wird der Verticalgrundschnitt nach Fig. 18 gefunden.

2) Für den Würfel in Fig. 3 die Grundschnitte folgender Linien zu finden:

- α) der Diagonalen auf der vordern und hintern Fläche;
- β) der Diagonalen auf der obern und untern Fläche;
- γ) der Diagonalen auf der rechten und linken Fläche;
- δ) der Körperdiagonalen des Würfels.

Andeutungen. In α) und β) liegt je ein Grundschnitt unendlich fern. Bei γ muss man den Seitenriss verwenden.

3) Die Grundschnitte einer Geraden sind gegeben, man soll ihren Aufriss und Grundriss construiren.

Andeutung. In Fig. 18 sieht man, wie aus der Kenntniss der Grundschnitte h und v' die Punkte h' und v gefunden werden. Dann kennt man aber den Grundriss vh und den Aufriss $v'h'$.

4) Durch einen Punkt a des Aufrisses eine Gerade parallel mit einer gegebenen Richtung m des Grundrisses zu legen.

Andeutung. Der Aufriss der Geraden ist mit der Axe, ihr Grundriss ist mit der Richtung m parallel.

5) Die Aufgabe 3 zu lösen, wenn der Horizontalgrundschnitt unendlich fern ist.

Andeutung. Diese Aufgabe ist mit 4 identisch.

6) Wie erkennt man aus den Grundrissen und Aufrissen zweier Geraden, ob sich diese Geraden schneiden, ob sie parallel sind oder sich kreuzen?

7) Durch einen Punkt eine Parallele zu einer Geraden zu ziehen.

8) Den Winkel zweier Geraden zu bestimmen.

Andeutung. Durch ein Dreieck, in welchem dieser Winkel gelegen ist. Suche nach § 35, 14 die wahre Gestalt des Dreiecks.

9) Eine Ebene schneidet im Allgemeinen die Grundrissebene und die Aufrissebene in zwei Geraden, welche Horizontalspur und Verticalspur der Ebene genannt werden und sich in einem Punkte der Axe schneiden. Man soll für folgende Flächen des Würfels in Fig. 3 die Spuren angeben:

- α) für die obere und untere Fläche;
- β) für die vordere und hintere Fläche;
- γ) für die rechte und linke Fläche.

Andeutung. Bei α und β liegt je eine Spur im Unendlichen.

10) Zwei sich schneidende Geraden sind gegeben. Man soll die Spuren der durch sie bestimmten Ebene finden.

Andeutung. Die Horizontalgrundschnitte beider Linien liegen in der Horizontalspur der Ebene, die beiden Verticalgrundschnitte bestimmen die Verticalspur.

11) Die Spuren derjenigen Diagonalebene des Würfels Fig. 3 zu finden, welche durch Kanten gehen, die

- α) mit der Axe parallel sind;
- β) auf der Aufrissebene senkrecht stehen;
- γ) auf der Grundrissebene senkrecht stehen.

Andeutung. α) Beide Spuren der Diagonalebene $ABHG$ sind nach § 4b mit den Kanten AB und HG und deshalb auch mit der Axe parallel. Benütze die Andeutung zu 10 und Aufgabe 2 γ . β) Die Verticalspur von $ADGF$ ist mit den Kanten AF und DG parallel. Die Horizontalspur ist nach § 11, 15 α senkrecht zur Aufrissebene und daher auch senkrecht zur Axe.

12) Welche Bedingungen müssen die Spuren einer Ebene erfüllen, wenn dieselbe

- α) auf der Axe senkrecht stehen soll (9, γ);
- β) mit der Axe parallel sein soll (11, α);
- γ) auf der Aufrissebene senkrecht stehen soll (11, β);
- δ) auf der Grundrissebene senkrecht stehen soll (11, γ).

13) Wenn zwei Ebenen parallel sind, so sind ihre Spuren paarweise parallel. (Beweis?) Kann dieser Satz umgekehrt werden.

Andeutung. Vergl. 11, α .

14) Zwei Ebenen sind durch ihre Spuren gegeben. Die Schnittlinie der Ebenen zu finden, unter der Voraussetzung, dass

- α) die Verticalspuren, sowie die Horizontalspuren einander schneiden;
- β) die Verticalspuren einander schneiden, die Horizontalspuren aber parallel sind;
- γ) die Horizontalspuren sich schneiden, die Verticalspuren aber parallel sind.

Man beweise aus früheren Sätzen, dass die Schnittlinie der Ebenen in β mit den Horizontalspuren parallel ist.

Andeutung. Die Schnittpunkte der Spuren bestimmen die Grundschnitte der gesuchten Geraden. Vergl. Aufgabe 3, 4, 5.

15) Durch eine Gerade eine beliebige Ebene zu legen.

Andeutung. Verbinde einen beliebigen Punkt der Axe mit den Grundschnitten der Geraden.

16) Durch eine Gerade eine Ebene parallel zur Axe zu legen.

17) Durch eine Gerade l eine Ebene parallel zu einer andern Geraden m zu legen.

Andeutung. Durch einen Punkt von l ziehe eine Gerade, welche mit m parallel ist (§ 36, 7). Wende Aufgabe 10 an.

18) Die Spuren der Ebene zu finden, welche durch drei Punkte bestimmt ist. Verwende Aufgabe 10.

19) Den Schnittpunkt einer Geraden l und einer Ebene α zu finden.

Andeutung. Lege durch die Gerade eine zweite Ebene und schneide sie mit α . Die Schnittlinie trifft die Gerade l in dem gesuchten Punkte.

20) Die Aufgabe 19 zu lösen, wenn die Gerade l senkrecht zur Grundrissebene ist oder: den Aufriss eines Punktes der Ebene α zu finden, wenn sein Grundriss gegeben ist.

21) Durch einen Punkt der Aufrissebene oder Grundrissebene eine Ebene zu legen, welche mit einer gegebenen Ebene parallel ist. (Vergl. Aufgabe 13.)

22) Durch einen beliebigen Punkt M eine Ebene parallel zu einer gegebenen Ebene α zu legen.

Andeutung. Lege durch M eine Gerade, welche mit der Horizontalspur von α parallel ist. Der Punkt in welchem diese Gerade von der Aufrissebene getroffen wird, liegt in der gesuchten Ebene. (Wende 21 an.)

23) Eine Ebene α sei durch ihre Spuren und ein Punkt M der Ebene durch Auf- und Grundriss gegeben. (Vergl. 20.) Man denke sich alsdann die Ebene um ihre Horizontalspur gedreht. Welches ist die Bahn des Punktes M und seines Grundrisses m ?

24) Den Radius des Kreises anzugeben, welchen der Punkt M in Aufgabe 23 beschreibt.

Andeutung. Dieser Radius ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Die eine Cathete desselben ist der Abstand des Grundrisses m von der Horizontalspur der Ebene α . Die andere Cathete ist Mm oder die Höhe des Punktes M über der Grundrissebene.

25) Man denke sich die in 22 besprochene Drehung soweit ausgeführt, dass die Ebene α in die Grundrissebene zu liegen kommt. In welche Lage kommt alsdann der Punkt M ?

26) Die wahre Gestalt des Dreiecks in Aufgabe 18 nach 25 zu finden.

27) Wenn eine Gerade l senkrecht auf einer Ebene ε steht, so ist der Aufriss von l senkrecht zur Verticalspur von ε und der Grundriss von l ist senkrecht zur Horizontalspur von ε . Beweis?

Andeutung. Die projicirende Ebene, welche l und den Aufriss von l enthält, ist auf ε und auf der Aufrissebene senkrecht. Daher muss auch der Schnitt von ε und der Aufrissebene — die Verticalspur von ε — auf der projicirenden Ebene senkrecht sein.

- 28) Durch einen Punkt M ausserhalb der Ebene ε eine Senkrechte auf ε zu fällen.
- 29) In einem Punkte M einer Ebene ε eine Senkrechte zu errichten.
- 30) Es sei eine Gerade l gegeben. Man soll
 α) eine beliebige zu l senkrechte Ebene legen;
 β) durch einen gegebenen Punkt eine solche Ebene legen.
- 31) Den Abstand eines Punktes von einer Ebene zu bestimmen.
- 32) Den Abstand zweier parallelen Ebenen zu bestimmen.
- 33) Den kürzesten Abstand zweier sich kreuzenden Geraden zu bestimmen.



Dritter Cursus.

VI. Abschnitt.

Berechnung von Oberflächen.

§ 37. Oberflächen von vollständigen Pyramiden und Kegeln.

a) Das Netz einer Pyramide, deren Grundfläche ein regelmässiges Vieleck ist und deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkte dieses Vielecks liegt, ist in Fig. 28 dargestellt (vergl. § 15). Die Grundfläche γ wird als die Hälfte des

Fig. 28.

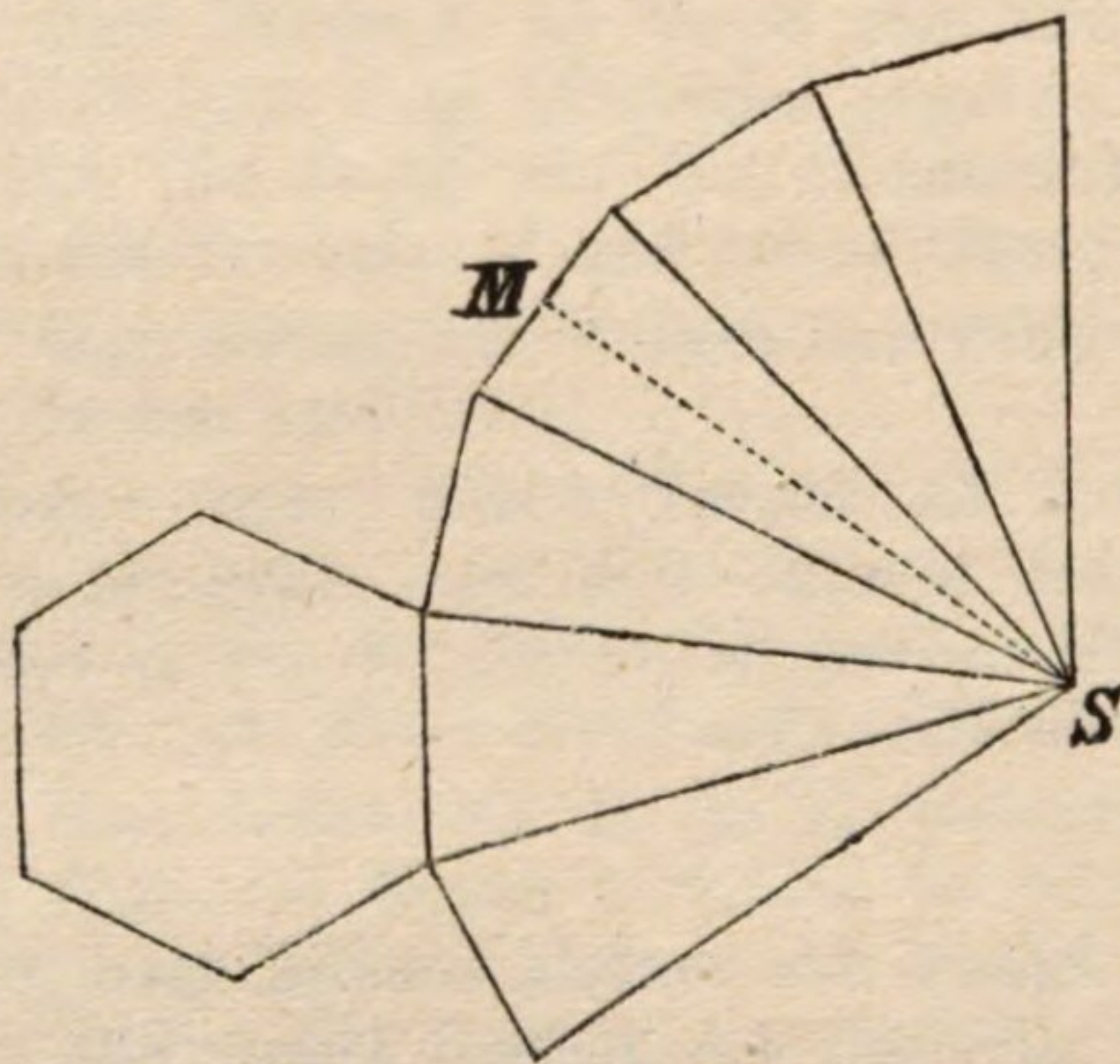
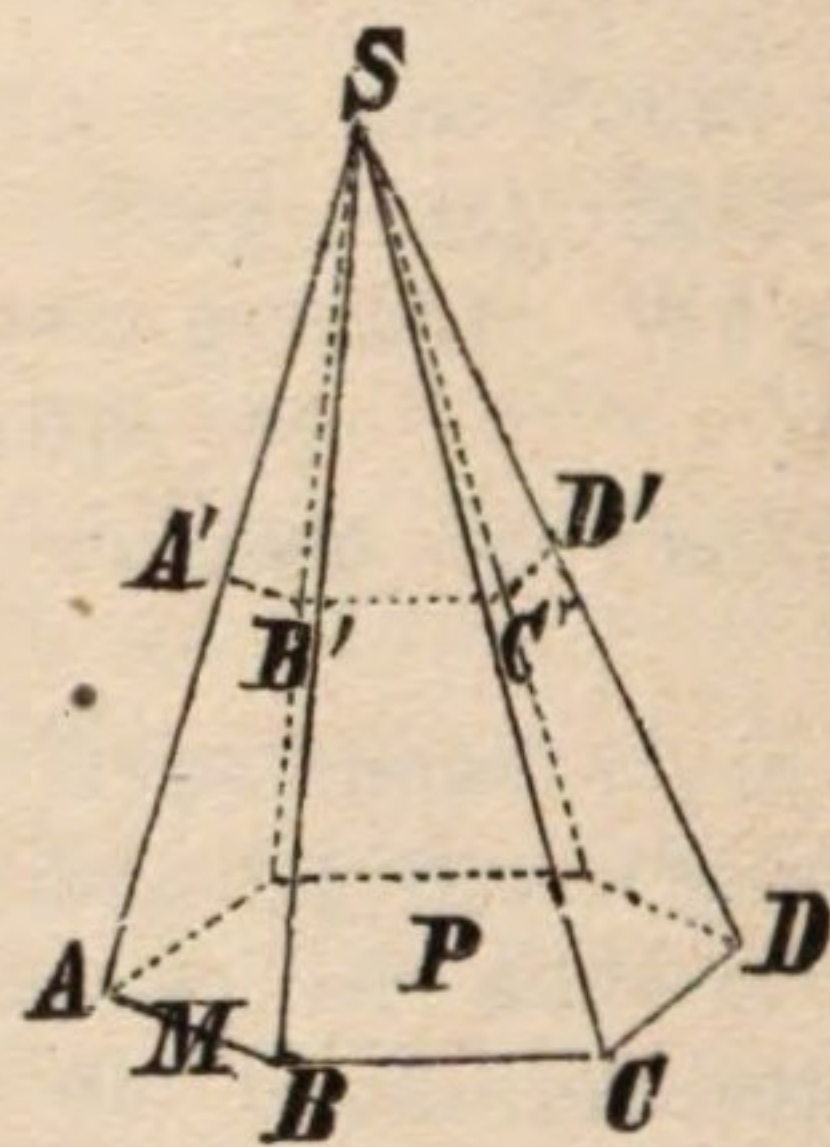


Fig. 27.



Productes aus ihrem Umring u und dem Radius (r) des eingeschriebenen Kreises berechnet ($\gamma = \frac{u \cdot r}{2}$). Die Summe der Seitenflächen, welche unter dem Namen Mantelfläche (μ) zusammengefasst werden können, wird berechnet, indem man den Umring der Grundfläche mit der Höhe einer Seitenfläche

($SM = h$) multiplicirt und das Product durch 2 theilt ($\mu = \frac{u \cdot h}{2}$). Die Oberfläche wird durch Addition von γ und μ gefunden $\omega = \frac{u(r + h)}{2}$.

b) Eine gerade Pyramide mit regelmässiger Grundfläche geht in einen geraden Kreiskegel über, wenn die Seitenzahl des Vielecks unbegrenzt zunimmt. Daraus folgt, dass das Netz eines solchen Kegels aus einem Kreissector und einer Kreis-

Fig. 30.

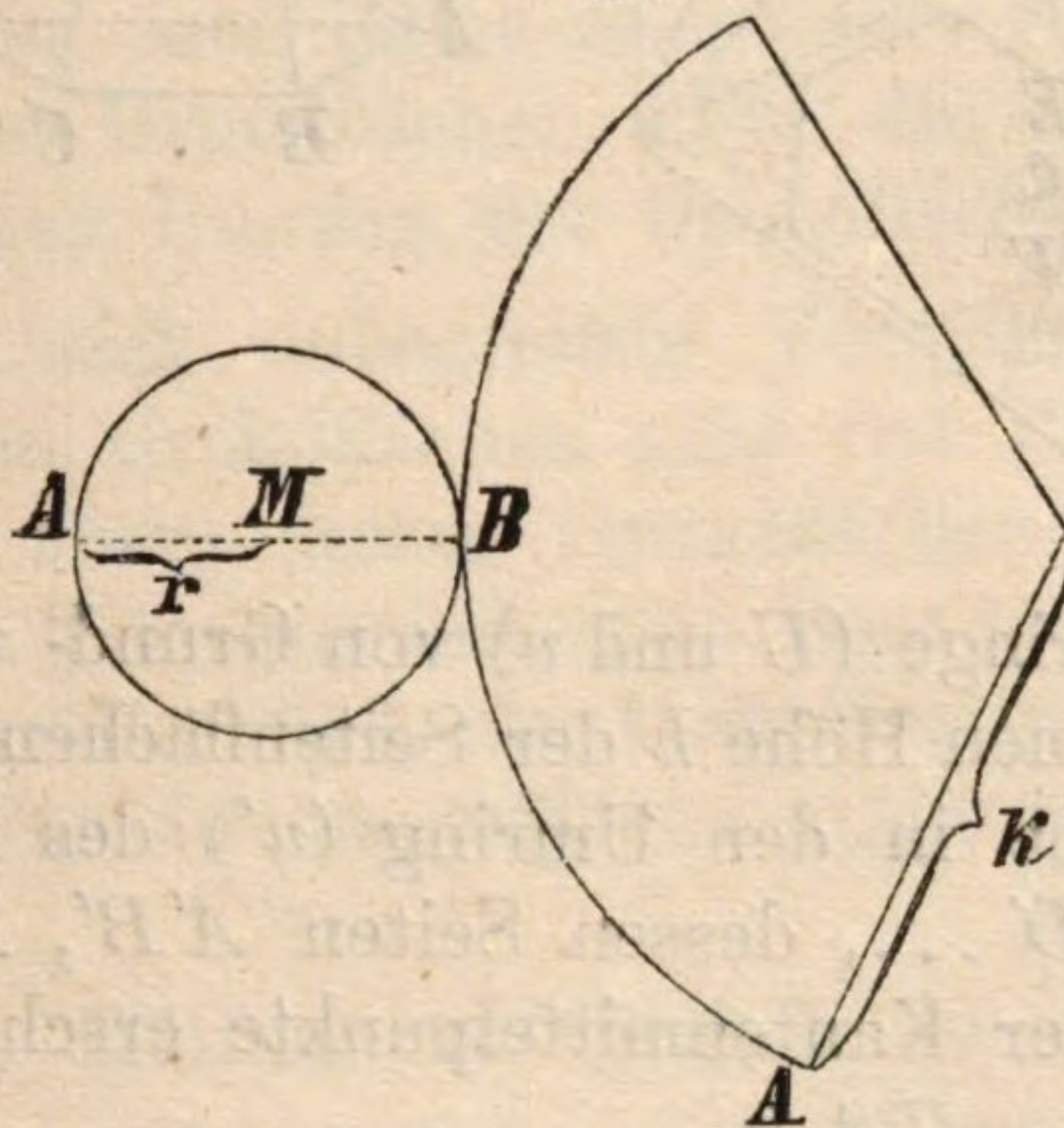
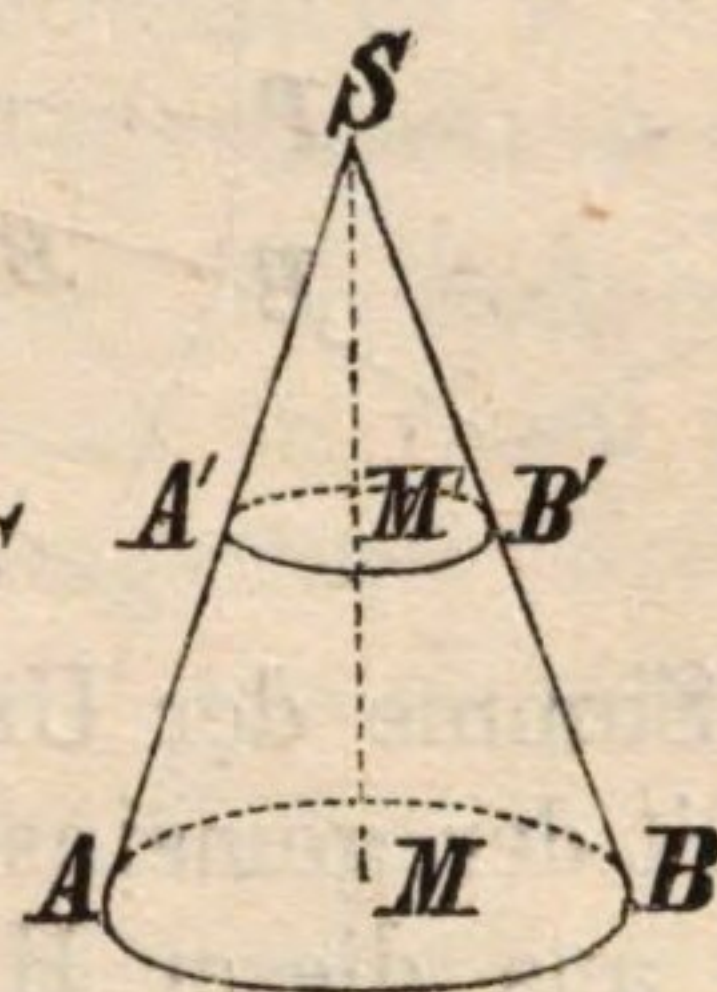


Fig. 29.



fläche besteht. Der Bogen des Sectors muss dem Umringe der Kreisfläche gleich sein. Da bei dem Uebergange von der Pyramide zum Kegel die Höhe SM (Fig. 27 und 28) einer Seitenfläche zu einer Kante (k) des Kegels wird, so findet sich die Mantelfläche und die ganze Oberfläche durch Einsetzen der Kantenlänge k an der Stelle von h in die Formeln von § 37a:

$$\mu = \frac{u \cdot k}{2} = \pi r \cdot k$$

und $\omega = \pi r k + r^2 \pi = r \pi (r + k)$.

§ 38. Oberflächen von abgestumpften Pyramiden und Kegeln.

a) Wenn man von einer geraden Pyramide mit regelmässiger Grundfläche durch eine Ebene, welche dieser Grundfläche parallel ist, das der Spitze zugekehrte Stück abschneidet, so entsteht der Pyramidenstumpf, dessen Netz in Fig. 32 dargestellt ist. Die Seitenflächen sind gleichschenklige Trapeze. Die Fläche eines solchen Trapezes $ABEF$ ist das

Product aus der halben Summe der parallelen Seiten oder der Mittellinie $A'B'$ und der Höhe ($PQ = h$). Die Mantelfläche des Pyramidenstumpfes ist also das Product aus der

Fig. 32.

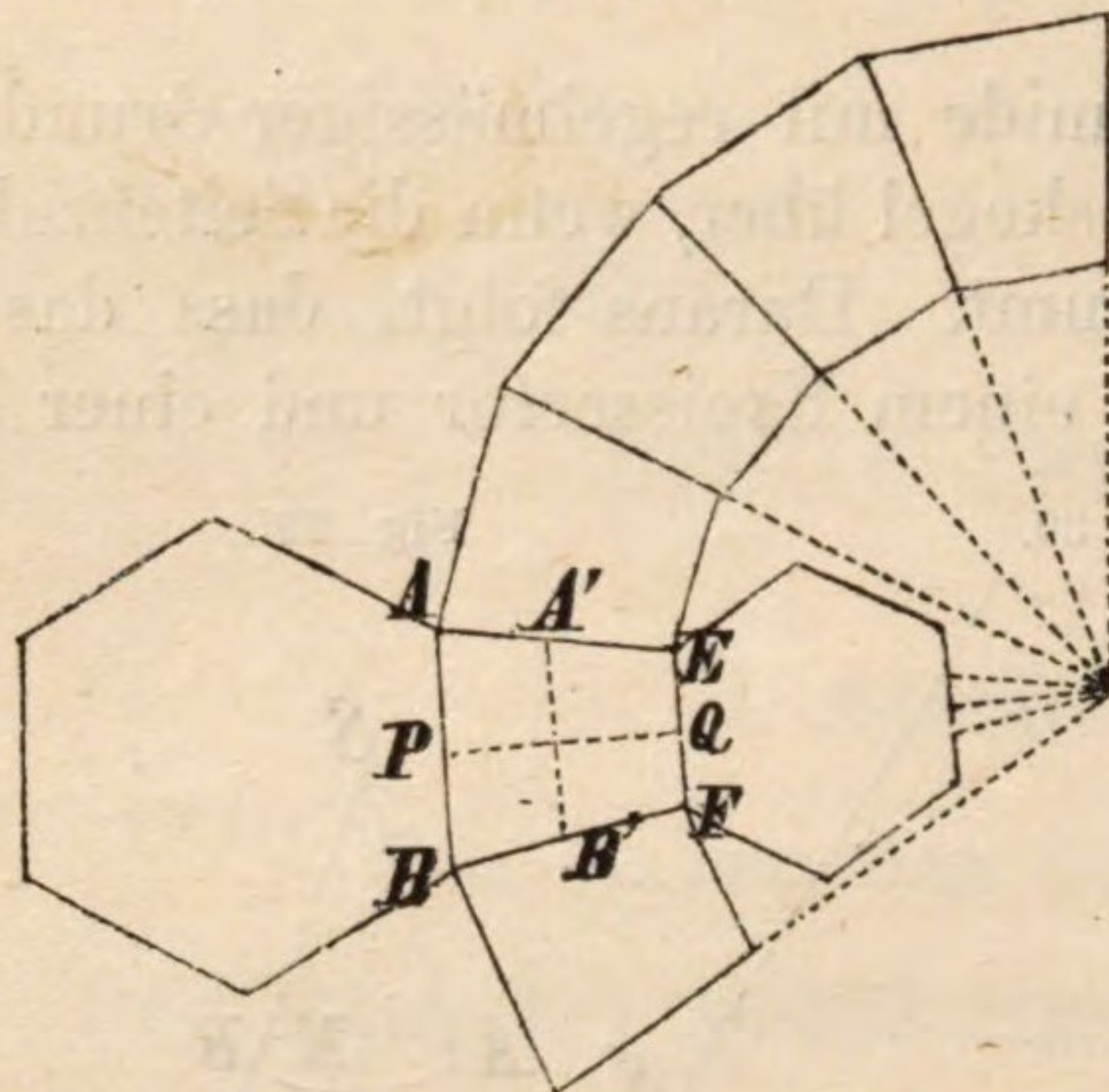
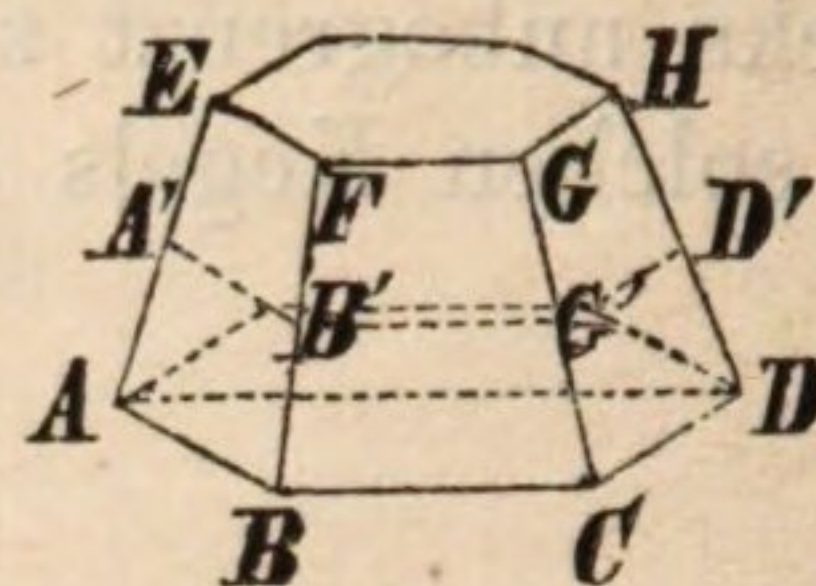


Fig. 31.



halben Summe der Umränge (U und u) von Grund- und Endfläche mit der gemeinsamen Höhe h der Seitenflächen oder das Product aus dieser Höhe in den Umrang (u') des mittleren Normalschnitts $A'B'C'D' \dots$, dessen Seiten $A'B'$, $B'C' \dots$ als Verbindungslinien der Kantenmittelpunkte erscheinen.

$$\mu = h \cdot \frac{U + u}{2} = h \cdot u'.$$

b) Wenn in dem Pyramidenstumpfe Fig. 31 die Seitenzahl der regelmässigen Grundfläche unbegrenzt zunimmt, so

Fig. 34.

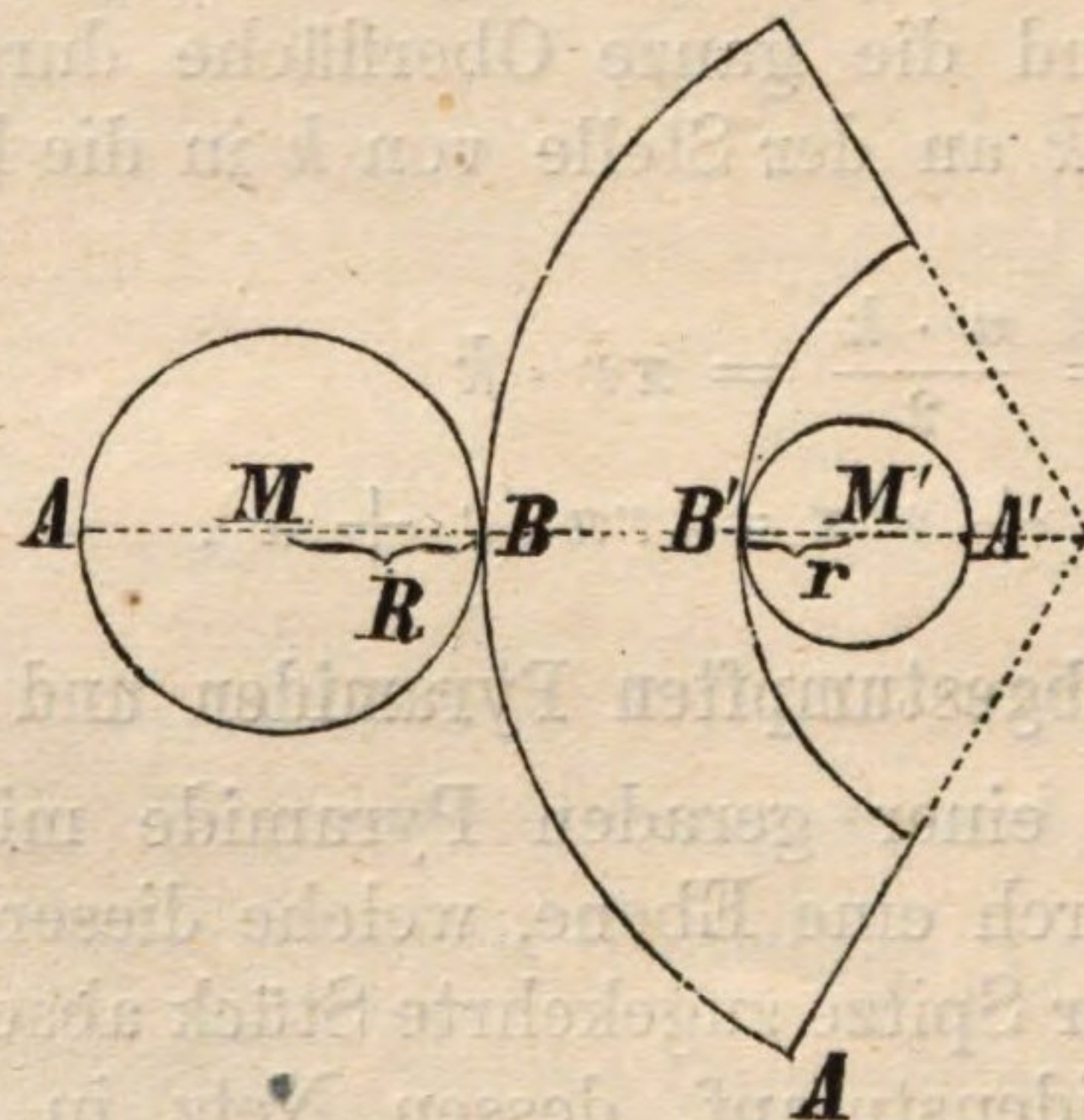
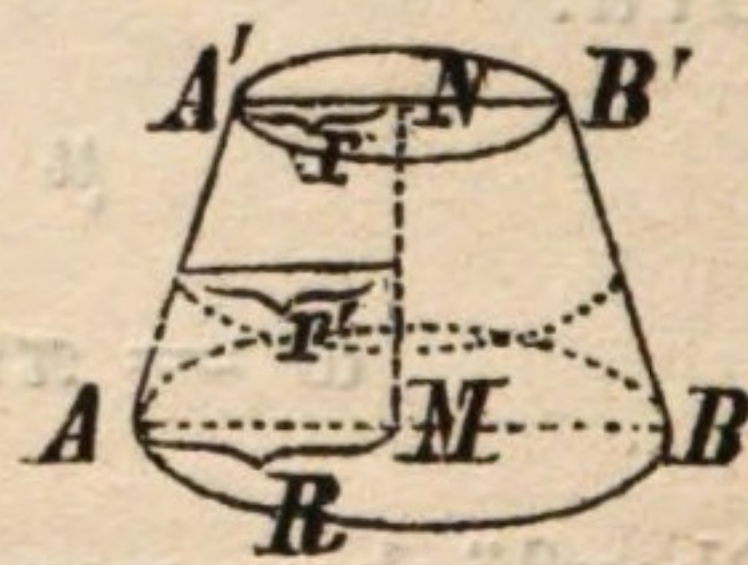


Fig. 33.



entsteht ein gerader Kegelstumpf, dessen Netz in Fig. 34 dargestellt ist. Die Formel für die Mantelfläche wird er-

halten, indem man in den Formeln von § 38a für h die Kante ($AA' = k$) des Kegels setzt und bedenkt, dass die Umringe U, u, u' Peripherien von Kreisen sind.

$$\mu = \frac{U + u}{2} \cdot k = \pi(R + r)k \text{ oder } \mu = u' \cdot k = 2\pi r' \cdot k.$$

§ 39. Oberflächen von Prismen und Cylindern.

a) Das Netz eines geraden Prismas, dessen auf parallelen Trägern gelegene Grundflächen regelmässige Vielecke sind, besteht aus einer Reihe aneinander stossender Rechtecke und den beiden Grundflächen. Für die Mantelfläche μ hat man, wenn u den Umring der Grundfläche bezeichnet: $\mu = u \cdot k$.

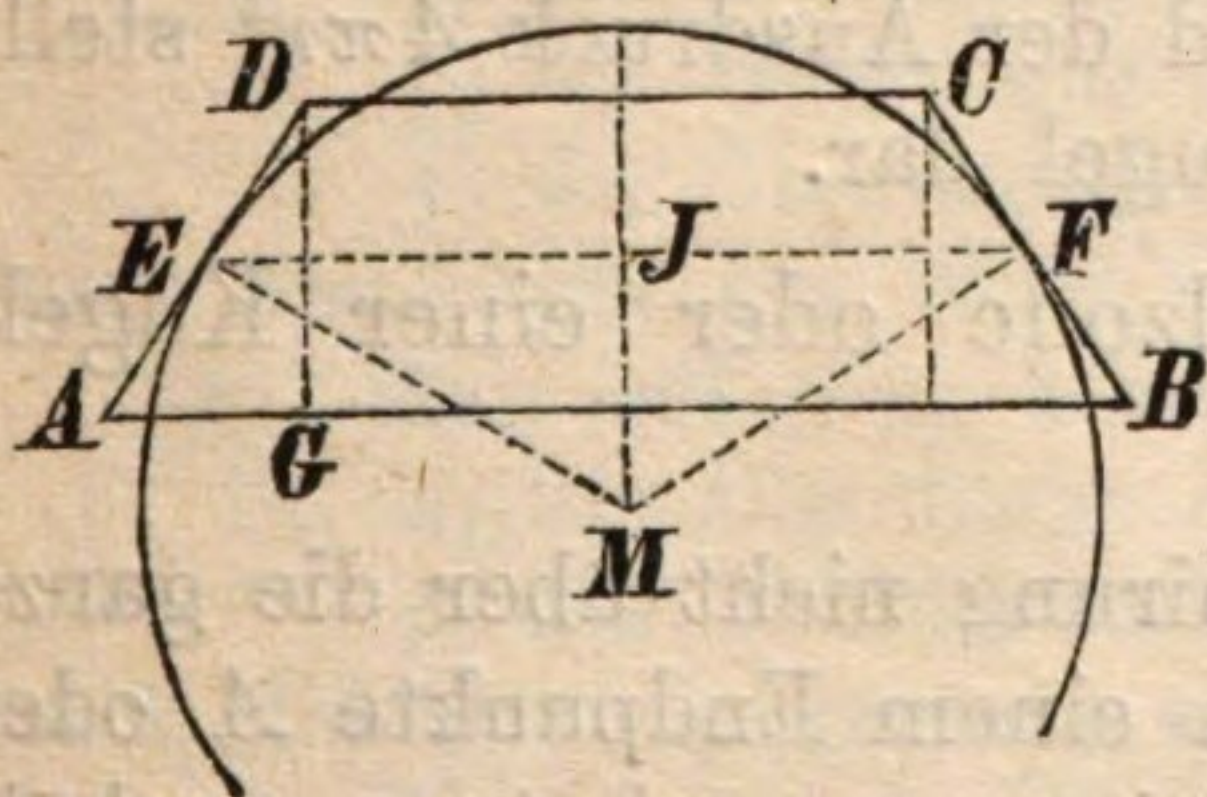
b) Durch unbegrenzte Vermehrung der Seitenzahl in den beiden Grundflächen geht das Prisma in einen geraden Cylinder über, dessen Grundflächen congruente Kreise auf parallelen Trägern sind. Das Netz besteht aus diesen Kreisen und einem Rechteck als Ausbreitung der Mantelfläche in die Ebene. Für die Mantelfläche μ hat man: $\mu = uk = 2\pi r \cdot k$.

§ 40. Hülfsatz zur Berechnung der Kugeloberfläche.

a) Die Mantelfläche eines Kegelstumpfes (mit parallelen Grundflächen) ist das Product aus der Höhe (h) des Kegelstumpfes und dem Umring ($2\pi r$) eines Hauptkreises auf derjenigen Kugel, welche die Mantelfläche längs des mittleren Normalschnitts (zur Kegelaxe) berührt. $\mu = 2\pi rh$.

Beweis. $ABCD$ sei ein gleichschenkliges Trapez mit der Symmetrieaxe JM und der Strecke EF , welche die Mittelpunkte der Schenkel verbindet. Die in E und F errichteten Normalen schneiden sich in einem Punkte M der Symmetrieaxe und um diesen Punkt als Centrum kann ein Kreis gezogen werden, welcher die Schenkel des Trapezes in E und F berührt ($ME = MF = r$). Denkt man die Figur in Rotation um die Symmetrieaxe, so beschreibt das Trapez die Oberfläche eines Kegelstumpfes und der Kreis beschreibt eine Kugel, welche die Mantelfläche längs des mittleren Normalschnittes berührt ($EJ = \rho$ ist der Radius des Normalschnittes). Nach § 38b ist die Mantelfläche gleich $2\pi\rho \cdot k$, wo

Fig. 35.



k die Kante AD bezeichnet. Aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ADG und MEJ folgt $AD : DG = ME : EJ$ oder $k : h = r : \rho$, d. h. $k \cdot \rho = h \cdot r$. Durch Einsetzen in die vorige Formel erhält man $M = 2\pi rh$.

Zusatz. Die Formel $2\pi rh$ für den Cylindermantel kann in derselben Weise gedeutet werden, da r zugleich der Radius einer Kugel ist, welche den Cylinder längs eines zur Axe normalen Schnittes berührt.

§ 41. Berechnung der Kugeloberfläche.

a) Die Oberfläche der Kugel ist vier mal so gross als die Fläche eines Hauptkreises. $\omega = 4\pi r^2$.

Beweis. Man denke sich ein regelmässiges Vieleck von gerader Seitenzahl um einen kleinen Durchmesser AB (Fig. 36)

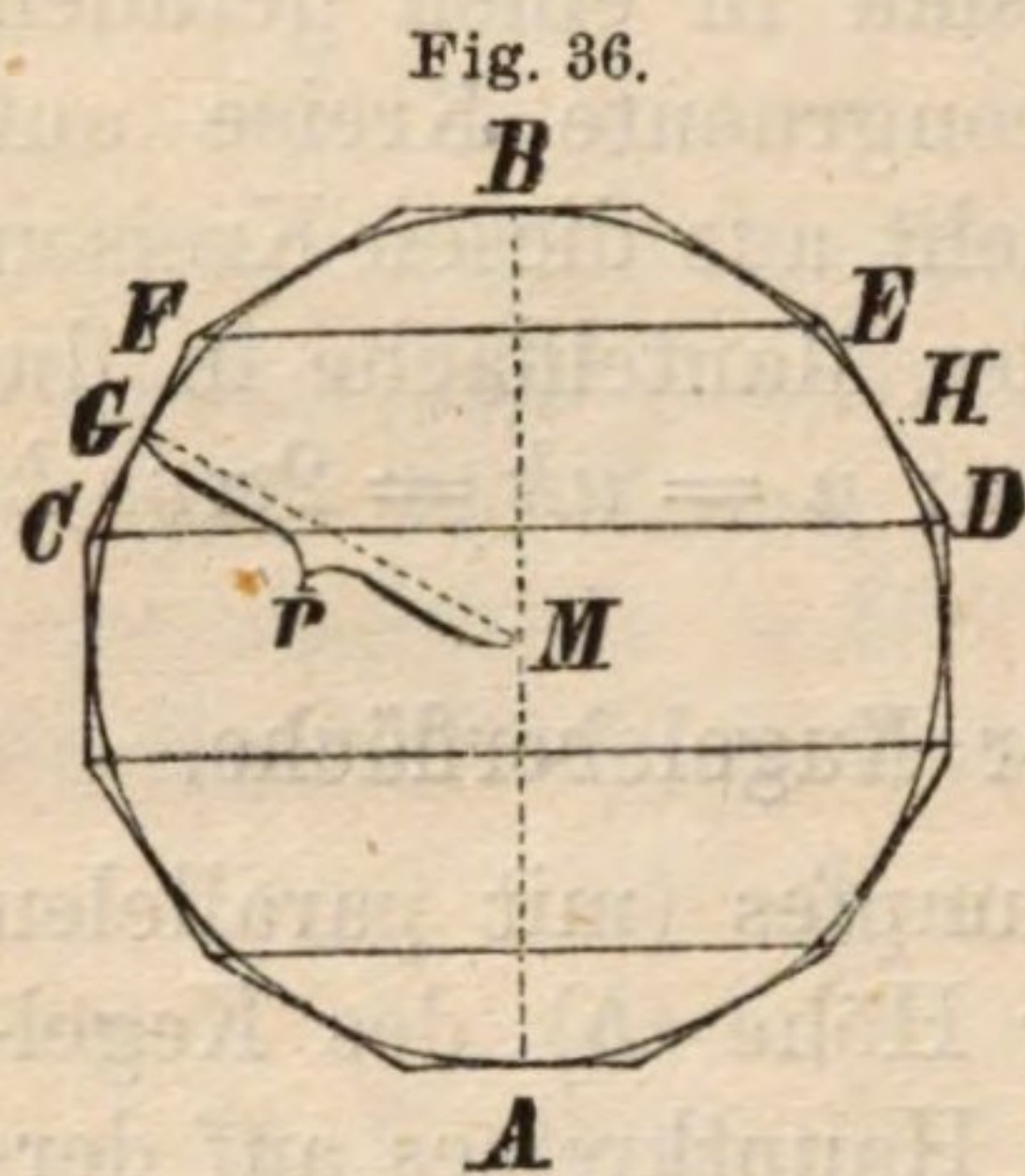


Fig. 36.

gedreht, so wird der Umring desselben die Oberfläche eines Körpers beschreiben, der aus Kegelstumpfen und möglicherweise einem Cylinder besteht. Der einbeschriebene Kreis berührt alle Seiten des Vielecks in ihren Mittelpunkten. Nimmt dieser Kreis auch an der Drehung Theil, so beschreibt er die Oberfläche einer Kugel, welche alle Mantelflächen der Kegel (und des Cylinders) längs des mittleren Normalschnitts berührt. Bildet man die Summe der nach § 40 berech-

neten Mantelflächen, so tritt $2\pi r$ als gemeinsamer Factor auf und man erhält $2\pi r \cdot AB$ oder $4\pi r^2$ für die Summe dieser Flächen. Sieht man nun den einbeschriebenen Kreis als die Grenzfigur an, in welche das Vieleck bei unbegrenzter Vermehrung der Seitenzahl übergeht, so erscheint auch die Kugel als die Grenzfigur des Rotationskörpers und der Ausdruck $4\pi r^2$ stellt somit die gesammte Oberfläche der Kugel dar.

b) Die Oberfläche einer Kugelzone oder einer Kugelhaube von der Höhe h ist $2\pi r \cdot h$.

— Wenn man die besprochene Summirung nicht über die ganze Länge der Axe AB , sondern nur von einem Endpunkte A oder B bis zu der Ebene eines Parallelkreises ausdehnt, so erhält man die Fläche der „Kugelhaube“, die von einem Pole (A oder B) bis zu jenem Parallelkreise reicht. Erstreckt sich aber diese Summation nur über den Theil der Kugel, welcher zwischen zwei Parallelkreisen gelegen ist, so erhält man die Fläche der von

beiden Kreisen begrenzten „Zone“. Es tritt also an die Stelle der Strecke AB nur die Höhe der Haube oder Zone und man erhält als Oberfläche derselben $2\pi r \cdot h$.

§ 42. Uebungen.

Die Zahlen, welche in den folgenden Uebungen ohne Benennung gegeben sind, bedeuten bezüglich Längenzahlen oder Flächenzahlen eines zehnteiligen Masssystemes.

1) Wie gross ist die Oberfläche eines geraden Prismas mit quadratischer Grundfläche, wenn die Höhe 25,4 und die Seite der Grundfläche 2,5 beträgt?

2) Die Kanten, welche in einer Ecke eines rechtwinkligen Parallelepipedons zusammenstossen, verhalten sich wie $2 : 3 : 15$; wie gross sind diese Kanten, wenn die Oberfläche des Körpers 364,5 beträgt?

3) Ein gerades Prisma von der Höhe 26,8 und der Oberfläche 715,2 hat eine quadratische Grundfläche; wie gross ist die Seite dieser Grundfläche?

4) Die Seite eines Würfels misst 5,8; wie gross ist seine Oberfläche?

5) Wie gross ist die Kante eines Würfels, wenn seine Oberfläche 326,7864 beträgt?

6) Die Summe der Oberflächen zweier Würfel ist ω und die Summe zweier Kanten ist k . Welchen Ausdruck erhält man für jede dieser Kanten?

7) In den folgenden Uebungen bezeichne g die Grundkante einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche, x sei die Höhe einer Seitenfläche und ω die Oberfläche des Körpers. Wie gross ist ω , wenn:
 $\alpha) g = 2, x = 3.$ $\beta) g = 4, x = 5.$ $\gamma) g = 8,4, x = 9,2.$ $\delta) g = 1,$
 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}?$

8) Wie gross ist x , wenn: $\alpha) g = 1, \omega = 21.$ $\beta) g = 3, \omega = 45.$
 $\gamma) g = 5, \omega = 85.$ $\delta) g = 7, \omega = 189?$

9) Wie gross ist g , wenn: $\alpha) x = 5, \omega = 39.$ $\beta) x = 6, \omega = 64.$
 $\gamma) x = 7, \omega = 95.$ $\delta) x = 9, \omega = 319?$

10) Man soll (Fig. 2 auf Tab. I)

- $\alpha)$ die Oberfläche des Würfels,
- $\beta)$ die Oberfläche der Pyramide $EGBF$,
- $\gamma)$ die Oberfläche des Tetraeders $EGDB$

durch die Kante des Würfels ausdrücken.

11) Man soll (Fig. 3 auf Tab. I)

- $\alpha)$ die Oberfläche der quadratischen Pyramide $ABDEC$,
- $\beta)$ die Oberfläche des Octaeders

durch die Octaederkante k ausdrücken.

12) Die Oberfläche eines regelmässigen Tetraeders durch die Höhe desselben auszudrücken.

13) Die Kante eines regelmässigen Tetraeders ist um 1,4 grösser als die Höhe; wie gross ist $\alpha)$ die Kante und $\beta)$ die Oberfläche desselben?

14) Die Oberfläche eines regelmässigen Ikosaeders durch seine Kantenlänge k auszudrücken.

15) Bezeichnet man die Kante des regelmässigen Dodekaeders mit k , so ist dessen Oberfläche $15 k^2 \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$.

Andeutung. In dem regelmässigen Fünfeck, dessen Seite mit k bezeichnet wird, ist der kleine Radius $\frac{k}{2} \cdot \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$.

16) Die Oberflächen zweier ähnlichen Pyramiden unterscheiden sich um 135, zwei homologe Kanten betragen 4,5 und 1,5; wie gross ist die Oberfläche einer jeden Pyramide?

17) Wie gross ist der Mantel und die ganze Oberfläche eines geraden Cylinders von der Höhe 18 und dem Durchmesser 2,5?

18) Der Mantel eines geraden Cylinders von der Höhe 12,5 habe den Flächeninhalt 82,5. Wie gross ist der Durchmesser des Körpers?

19) Die Höhe eines geraden Cylinders übertrifft den Umfang um 20,44. Wie gross sind beide, wenn die ganze Oberfläche 439,6 beträgt?

20) In den folgenden Aufgaben bedeutet r den Radius der Grundfläche, k die Kante und ω die Oberfläche eines geraden Kreiskegels. Wie gross ist ω , wenn: $\alpha)$ $r = 2$, $k = 3$. $\beta)$ $r = 4$, $k = 5$. $\gamma)$ $r = 8,4$, $k = 9,2$. $\delta)$ $r = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$?

21) Wie gross ist k , wenn: $\alpha)$ $r = 5$, $\omega = 355$. $\beta)$ $r = 7$, $\omega = 745,5$. $\gamma)$ $r = 3$, $\omega = 355,3$. $\delta)$ $r = 125,3$, $\omega = 44481,5$? Für π nehme man den Werth $\frac{355}{113}$.

22) Wie gross ist r , wenn: $\alpha)$ $k = 4$, $\omega = 15,7079$. $\beta)$ $k = 6$, $\omega = 50,2065$. $\gamma)$ $k = 10$, $\omega = 34,5575$. $\delta)$ $k = 12$, $\omega = 40,63867$.

23) Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels durch dessen Grundfläche γ und Höhe h auszudrücken.

24) Die Oberfläche eines geraden Kreiskegels durch die Höhe h und die Kante k auszudrücken.

25) Der Umring der Grundfläche eines geraden Kreiskegels wird von der Seite um 7,44 übertroffen; wie gross ist der Radius der Grundfläche, wenn die Oberfläche 138,16 beträgt?

26) Man soll (vergl. Fig. 2 auf Tab. I)

$\alpha)$ die Oberfläche des Kegels, welcher der Pyramide $EGBF$ umschrieben werden kann, durch die Kante k des Würfels ausdrücken;

$\beta)$ die Oberfläche des Kegels, welcher dem Tetraeder $EGBD$ umschrieben werden kann, durch die Kante k des Tetraeders ausdrücken.

Andeutung. Lege einen Kreis durch die Punkte E , G , B , so wird derselbe die Grundfläche der Kegel begrenzen, die in $\alpha)$ und $\beta)$ gemeint sind.

27) In den folgenden Aufgaben bedeutet ω die ganze Oberfläche, μ die Mantelfläche eines geraden Pyramidenstumpfes mit regelmässigen

Grundflächen. Die Seiten der Grundflächen heissen g und g' , die Höhe des Stumpfes h .

Wie gross ist ω , wenn die Grundflächen Quadrate sind und:
 $\alpha)$ $h = 3, g = 14, g' = 6.$ $\beta)$ $h = 6, g = 13, g' = 4?$

Andeutung. Berechne zuerst die Höhen der Trapeze, welche als Seitenflächen auftreten.

28) Die Grundflächen seien regelmässige Sechsecke. Wie gross ist ω , wenn: $\alpha)$ $g = 7, g' = 3, h = 2.$ $\beta)$ $g = 5, g' = 3, h = 3?$

29) Die Grundflächen seien abermals regelmässige Sechsecke. Wie gross ist h , wenn: $\alpha)$ $g = 7, g' = 5, \mu = 180.$ $\beta)$ $g = 6, g' = 4, \mu = 120?$

30) Die Grundflächen seien abermals regelmässige Sechsecke. Wie gross sind die Seiten g und g' , wenn ihre Differenz 4 ist und: $\alpha)$ $h = \sqrt{24}, \mu = 324.$ $\beta)$ $h = \sqrt{13}, \mu = 300?$

31) In den Aufgaben 31, 32, 33 bedeutet μ die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes. Die Radien der Grundflächen sind r und r' , die Höhe des Stumpfes ist h . Wie gross ist μ , wenn: $\alpha)$ $r = 23, r' = 5, h = 24.$ $\beta)$ $r = 18, r' = 6, h = 16?$

32) Wie gross ist r' , wenn: $\alpha)$ $r = 20, k = 10, \mu = 942,477.$ $\beta)$ $r = 9, k = 8, \mu = 351,858?$ (k ist die Kante des Stumpfes.)

33) Wie gross sind r und r' , wenn $\omega = 43,96, \mu = 30,615$ und $k = 3,9?$

34) Wie gross ist die Oberfläche ω einer Kugel, deren Halbmesser $\alpha)$ 6,3. $\beta)$ 91 beträgt ($\pi = \frac{22}{7}$)?

35) Wie gross ist ω , wenn der Durchmesser $\alpha)$ 11,30. $\beta)$ 18,08 beträgt ($\pi = \frac{355}{113}$)?

36) Man berechne die Oberfläche der Kugel, welche

- $\alpha)$ durch die Ecken des Würfels geht;
- $\beta)$ durch die Ecken des Tetraeders geht;
- $\gamma)$ durch die Ecken des Octaeders geht;
- $\delta)$ durch die Ecken des Ikosaeders geht;
- $\epsilon)$ durch die Ecken des Dodekaeders geht.

Für $\gamma)$ und $\delta)$ vergl. man § 30, 3 β und § 31, 4. In allen Fällen setze man die Kante des regelmässigen Polyeders gleich k .

37) Wie gross muss man den Halbmesser einer Kugel nehmen, damit sie dieselbe Oberfläche erhält, wie zwei andere Kugeln zusammen, von denen die eine einen Halbmesser von 4,5, die andere einen grössten Umfang (Hauptkreis) von 15,7 hat?

38) Die Summe der Durchmesser zweier Kugeln ist a , die ihrer Oberflächen ω ; wie gross ist der Durchmesser einer jeden?

39) Die Breite der Wendekreise auf der Erde ist $23^\circ 28'$, die der Polarkreise beträgt $90^\circ - 23^\circ 28'$. Wie gross ist die Oberfläche einer jeden der fünf Zonen, wenn die Erde als eine Kugel mit einem Hauptkreise von 40 Millionen Meter angesehen wird?

40) Die Oberfläche eines Kugelsectors zu finden, welcher durch Rotation eines Kreissectors entsteht. Der Radius des Kreises sei r und der Centriwinkel des Kreissectors α .

41) Wie gross ist die Oberfläche des Sectors in 40), wenn: α) $r = 7$, $\alpha = 35^\circ 20' 30''$. β) $r = 2,98$, $\alpha = 45^\circ 20' 22''$?

VII. Abschnitt.

Rauminhalt der Körper.

§ 43. Vergleichung des Rauminhaltes. — Prismen und Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

Congruente Körper haben gleichen Rauminhalt oder gleiches Volumen. Dasselbe gilt auch von Körpern, deren Theile entsprechend congruent sind. Hierauf beruhen die Beweise der beiden folgenden Sätze:

a) Prismen von derselben Grundfläche und Höhe haben gleiches Volumen.

b) Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe haben gleiches Volumen.

Der Beweis von b) wird vorangestellt, weil hernach der leichtere Beweis von a) nur einer Andeutung bedarf.

Fig. 37.

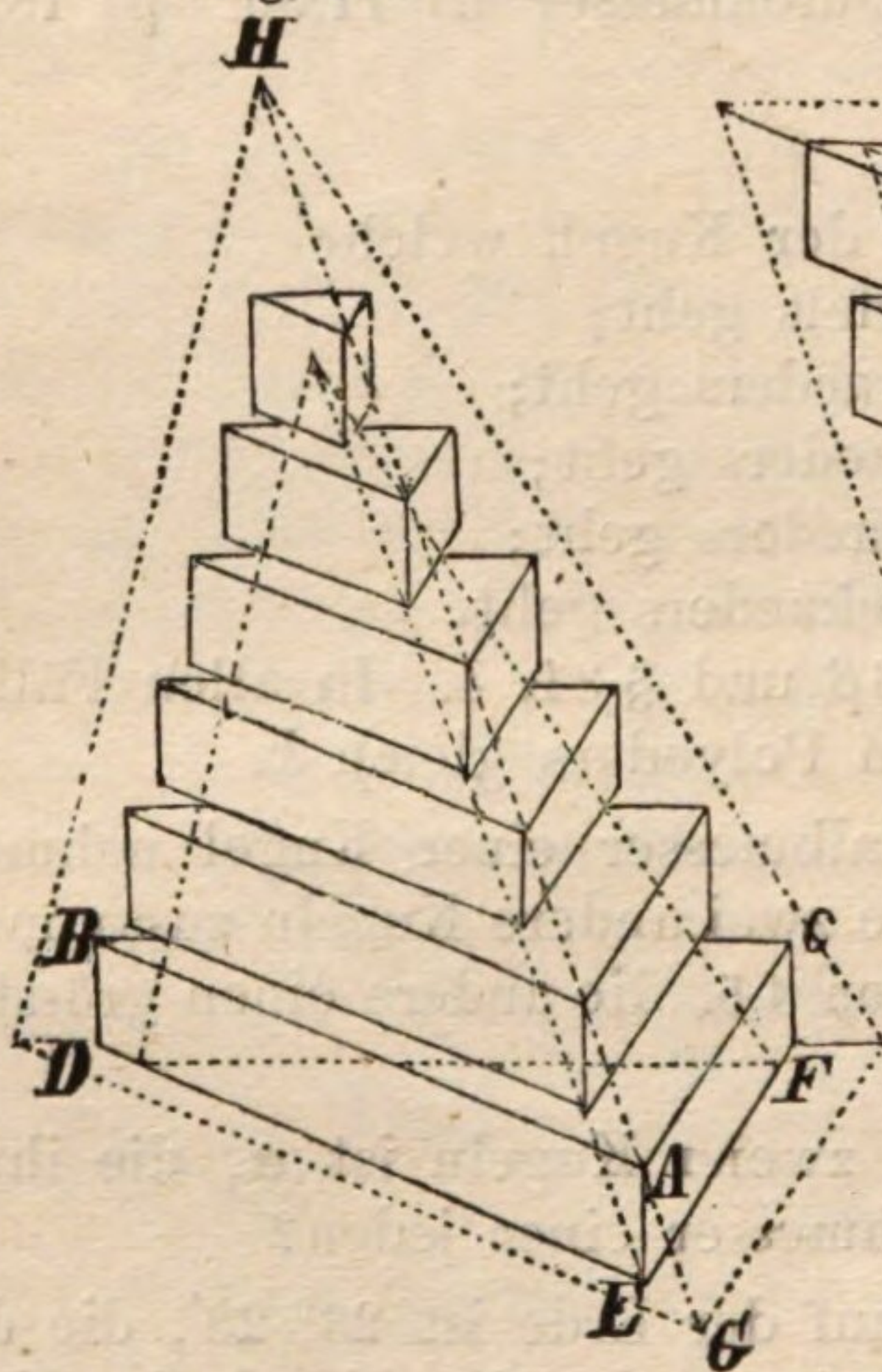
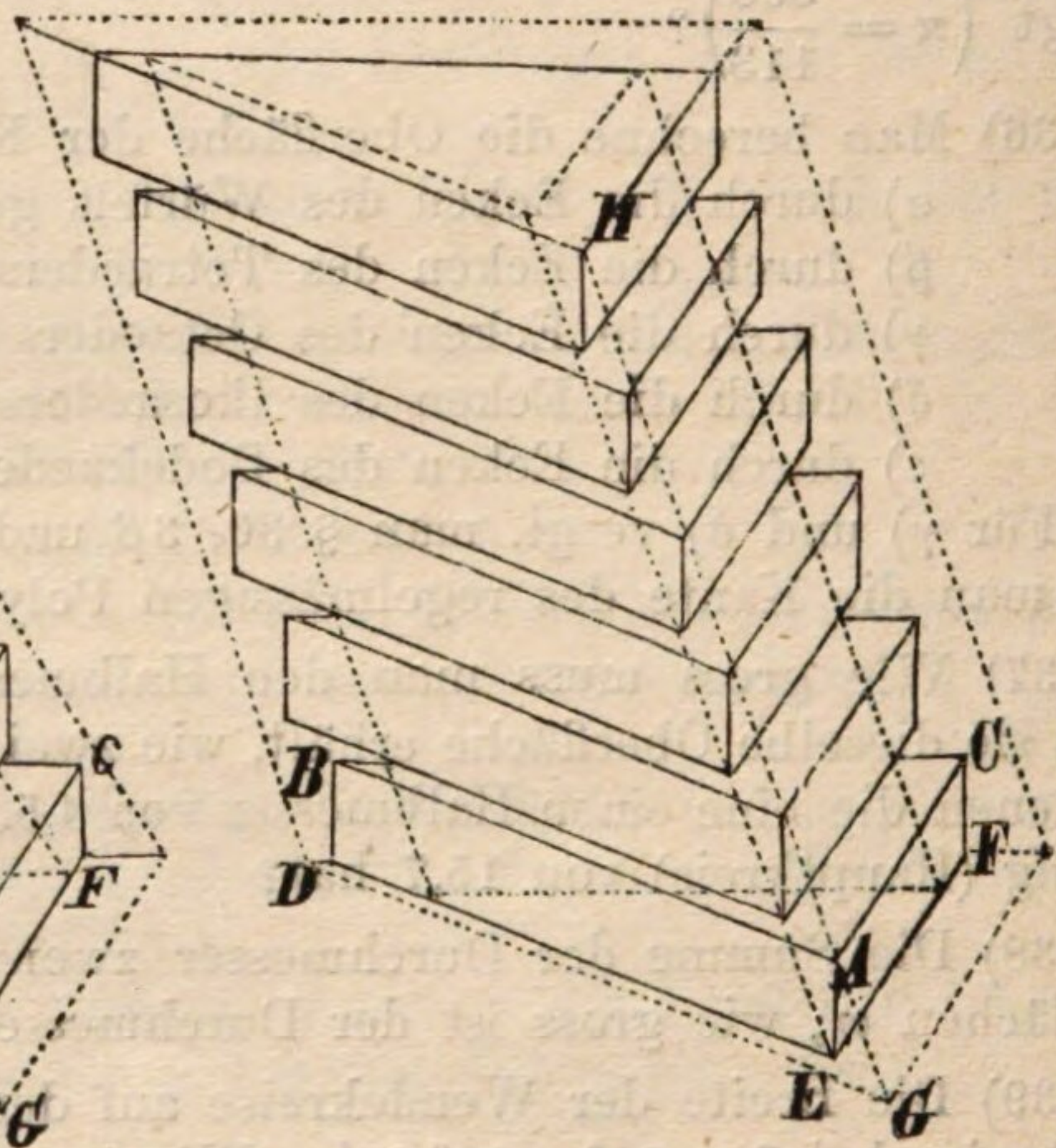


Fig. 38.



Beweis zu b): 1) für dreiseitige Pyramiden (Fig. 37). Man denke sich n senkrechte Prismen, deren Grundflächen äh-

liche Dreiecke sind. Die grösste dieser Grundflächen sei mit g bezeichnet und die homologen Seiten der Grundflächen sollen sich der Reihe nach verhalten wie die ganzen Zahlen $n, n-1, n-2 \dots 3, 2, 1$. Die gemeinsame Höhe der Prismen sei $\frac{h}{n}$, wo h eine gegebene Länge ist. Man stelle diese Prismen so auf einander (Fig. 37), dass der Eckpunkt A mit den entsprechenden Ecken der übrigen auf eine Gerade GH zu liegen kommt und die Kante AB mit allen entsprechenden Kanten parallel ist. Dann zeigt man leicht, dass der Punkt B mit allen homologen Ecken der übrigen Prismen auch auf einer Geraden liegt*. Man beweise ferner in zweckmässiger Reihenfolge, dass auch jede der übrigen Kanten des untern Prismas mit allen entsprechenden Kanten parallel ist und dass jeder Eckpunkt dieses Prismas sich mit den entsprechenden Ecken der andern auf einer Geraden befindet**. Aus dem Gesagten geht hervor, dass jede Schaar homologer Kanten auf einer Ebene gelegen ist. Drei dieser Ebenen, welche durch die Kanten AB, AC und DF des untern Prismas gehen, bestimmen mit dem Träger der Grundfläche DEF eine Pyramide P' , welche den treppenförmigen Körper, dessen Volum mit V_n bezeichnet werden soll, einschliesst. Mit den genannten Ebenen sind drei andere der Reihe nach parallel — die Ebenen, welche durch die Kanten DE, EF, BC des untersten Prismas bestimmt sind — und bilden mit dem Träger der Grundfläche DEF eine andere Pyramide P'' , welche vollständig in dem Körperraum V_n enthalten ist. Lässt man nun die Zahl n ins Unbegrenzte zunehmen, so fallen die Pyramiden P' und P'' in eine einzige Pyramide P von der Grundfläche g und der Höhe h zusammen***. Die Pyra-

* Wenn man auf einer Geraden n gleiche Strecken a abträgt und aus ihren Anfangspunkten parallele Strecken zieht, die sich wie die ganzen Zahlen $n; n-1; n-2 \dots 3; 2; 1$ verhalten, so liegen die Endpunkte der parallelen Strecken auf einer Geraden, welche durch den Endpunkt der letzten Strecke a geht.

** Dieser Beweis erledigt sich durch die Hinweisung auf die vorige Anmerkung oder durch den Satz: Wenn man an eine Gerade g parallele Strecken von gleicher Länge anlegt, so befinden sich die Endpunkte dieser Strecken auf einer Parallelen zu g .

*** Man bemerke, dass in dem Dreieck $AE G$ die Seite EG zugleich mit EA oder der Höhe des Prismas verschwindet. Dadurch fällt die Grundfläche von P' mit g zusammen. Ebenso beweise man dass die Grundfläche von P'' mit g zusammenfällt. Die Seitenkanten von P' und P'' decken sich nun auch und die Höhen beider Pyramiden fallen mit der von ihnen eingeschlossenen Höhe des aufgebauten Körpers zusammen.

vide P ist identisch mit dem Grenzwerthe von V_n , weil dieses Volum immer von den Pyramiden P' und P'' eingeschlossen ist. Da aber die Richtung der Geraden GH beliebig ist, so kann man auf die beschriebene Weise zu jeder Pyramide von der Grundfläche g und der Höhe h gelangen und alle diese Pyramiden haben das gleiche Volum, nämlich den Grenzwert von V_n .

2) Für Pyramiden, deren Grundfläche ein Vieleck (Fig. 39) ist. Man zerlege die Pyramide durch Diagonalebene in dreiseitige Prismen, deren entsprechende dieselbe Grundfläche und Höhe haben werden. Da der Satz für je zwei der letzteren Pyramiden gilt, so ist er auch für die ganzen Pyramiden richtig.

Beweis zu a): 1) für dreiseitige Prismen. Man denke sich n senkrechte Prismen, deren Grundflächen congruente Dreiecke sind und mit g bezeichnet werden sollen. Die gemeinsame Höhe dieser Prismen sei $\frac{h}{n}$, wo h eine gegebene Länge ist. Man stelle diese Prismen so auf einander (Fig. 38), dass der Eckpunkt A mit den entsprechenden Ecken der übrigen Prismen auf eine Gerade GH zu liegen kommt und die Kante AB mit allen entsprechenden Kanten parallel ist. Dann zeigt man leicht, dass der Punkt B mit allen homologen Ecken auf einer zu GH parallelen Geraden liegt. Der Beweis wird nun mit Hülfe der Figur 38 ganz nach b) geführt.

2) für vielseitige Prismen wird der Beweis wie bei b) unter 2) geführt.

§ 44. Fundamentalsätze zur Berechnung des Rauminhaltes.

a) Senkrechte Parallelepipede von congruenter Grundfläche verhalten sich wie ihre Höhen.

Die Höhen h und h' der beiden Körper P und P' mögen sich wie m zu n verhalten. Dann geht der n^{te} Theil von h' m mal in h auf. Man denke sich diese Theilung auf den Höhen ausgeführt und durch die Theilpunkte Ebenen parallel zur Grundfläche gelegt. Dadurch werden die Parallelepipede in unter sich congruente Theile getheilt, von denen m auf P und n auf P' kommen. Die Körper verhalten sich daher ebenfalls wie $m : n^*$.

Erklärung. Das Volum eines Körpers wird durch sein Verhältniss zur Volumeinheit angegeben. Als Volumeinheit wird eine Kubikeinheit gebraucht, d. h. ein Würfel (Cubus),

* Der Fall der incommensurablen Höhen wird wie in § 55 des ersten Theiles (Anm.) der ebenen Geometrie behandelt.

dessen Kanten Längeneinheiten und dessen Flächen demnach Quadrateinheiten sind.

b) Das Volum eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe*.

a, b, c seien die Längen der Kanten, welche in einem Eckpunkt des Parallelepipeds P zusammen stoßen.

Die Volumeinheit ist auch ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten alle der Längeneinheit gleich sind. Man denke sich noch zwei andere rechtwinklige Parallelepipeda P' und P'' so, dass die in einer Ecke zusammenstossenden Kanten bei P' die Längen $a, b, 1$ und bei P'' die Längen $a, 1, 1$ haben. Da rechtwinklige Parallelepipeda immer senkrecht sind, welche Seitenfläche man auch als Grundfläche ansehen will und die Höhen durch die Kanten selbst dargestellt sind, so gelten nach a) die Proportionen

$$P : P' = c : 1$$

$$P' : P'' = b : 1$$

$$P'' : \varepsilon = a : 1$$

Woraus man durch Multiplication $P : \varepsilon = a \cdot b \cdot c : 1$ erhält. Das Volum des Parallelepipeds ist also $a \cdot b \cdot c$ oder, wenn man die Kante c als Höhe ansieht $(a \cdot b) \times c$, woraus die Behauptung folgt, weil $a \cdot b$ der Inhalt der Grundfläche ist.

Anmerkung. Der Rauminhalt des Würfels ist der dritten Potenz der Kante gleich. Der Würfel, dessen Kante ein Meter, Decimeter u. s. w. beträgt, heisst Cubikmeter, Cubikdecimeter u. s. w. Da der Cubikmeter in jeder Kante 10 Decimeter misst, so enthält er $10^3 = 1000$ Cubikdecimeter. Die Eintheilungszahl des Cubikmasses ist daher 1000.

$$1 \text{ Cub}^m = 1000 \text{ Cub}^{dm}; \quad 1 \text{ Cub}^{dm} = 1000 \text{ Cub}^{cm}; \dots\dots$$

$$1 \text{ Cub}^{dm} = \frac{1}{1000} \text{ Cub}^m; \quad 1 \text{ Cub}^{cm} = \frac{1}{1000} \text{ Cub}^{dm}.$$

§ 45. Berechnung von Prismen und Pyramiden.

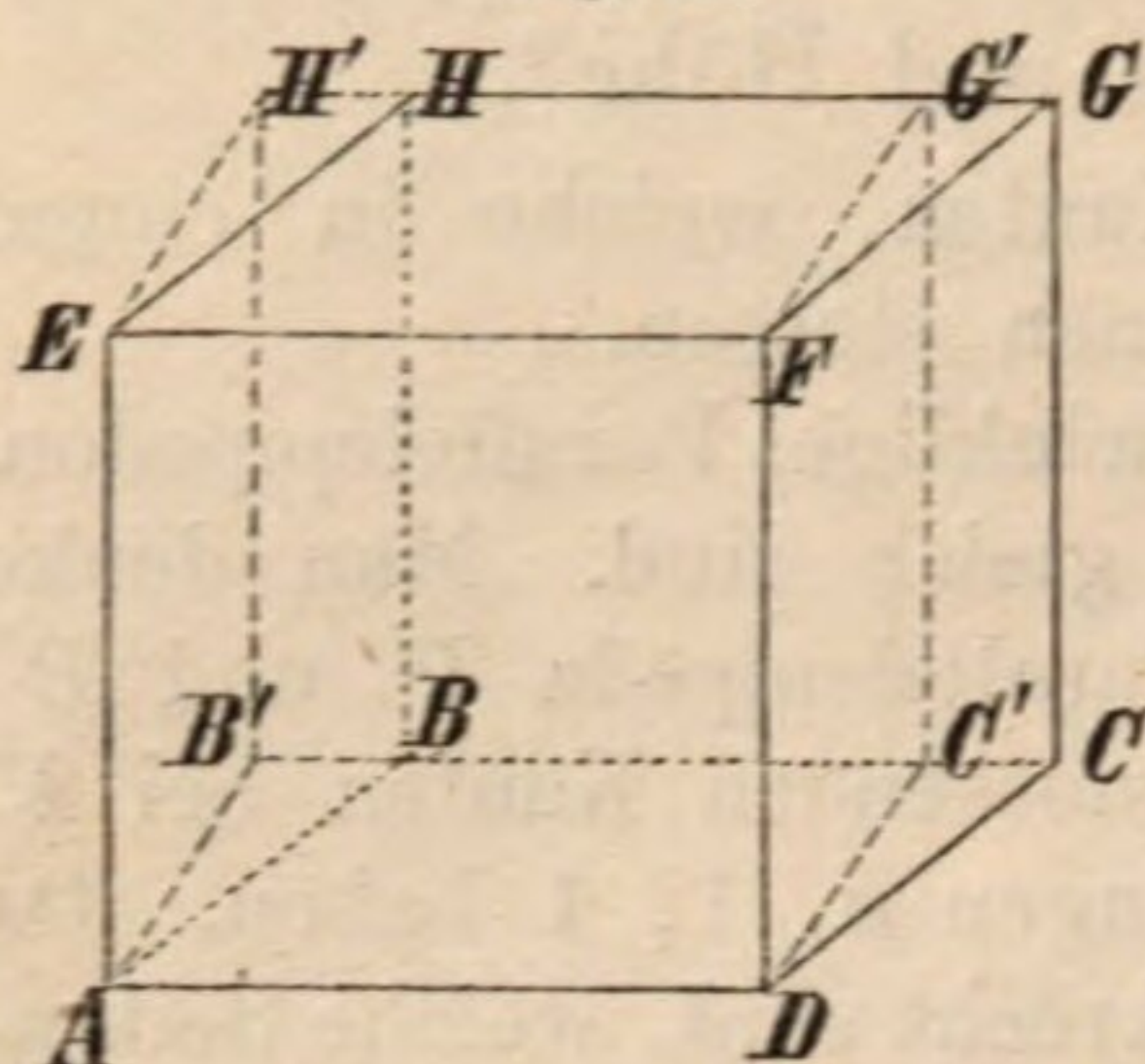
a) Das Volum eines Prismas (mit parallelen Grundflächen) ist gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. 1) Die Grundfläche ist ein Rechteck. Wenn das Prisma senkrecht ist, so folgt die Behauptung aus § 44b. Für schiefe Prismen wende man noch § 43a an.

* Kurze Ausdrucksweise wie in I § 56a der ebenen Geometrie.

2. Die Grundfläche ist ein schiefwinkliges Parallelogramm. Man verwandle die Grundfläche $ABCD$ des gegebenen Prismas

Fig. 39.

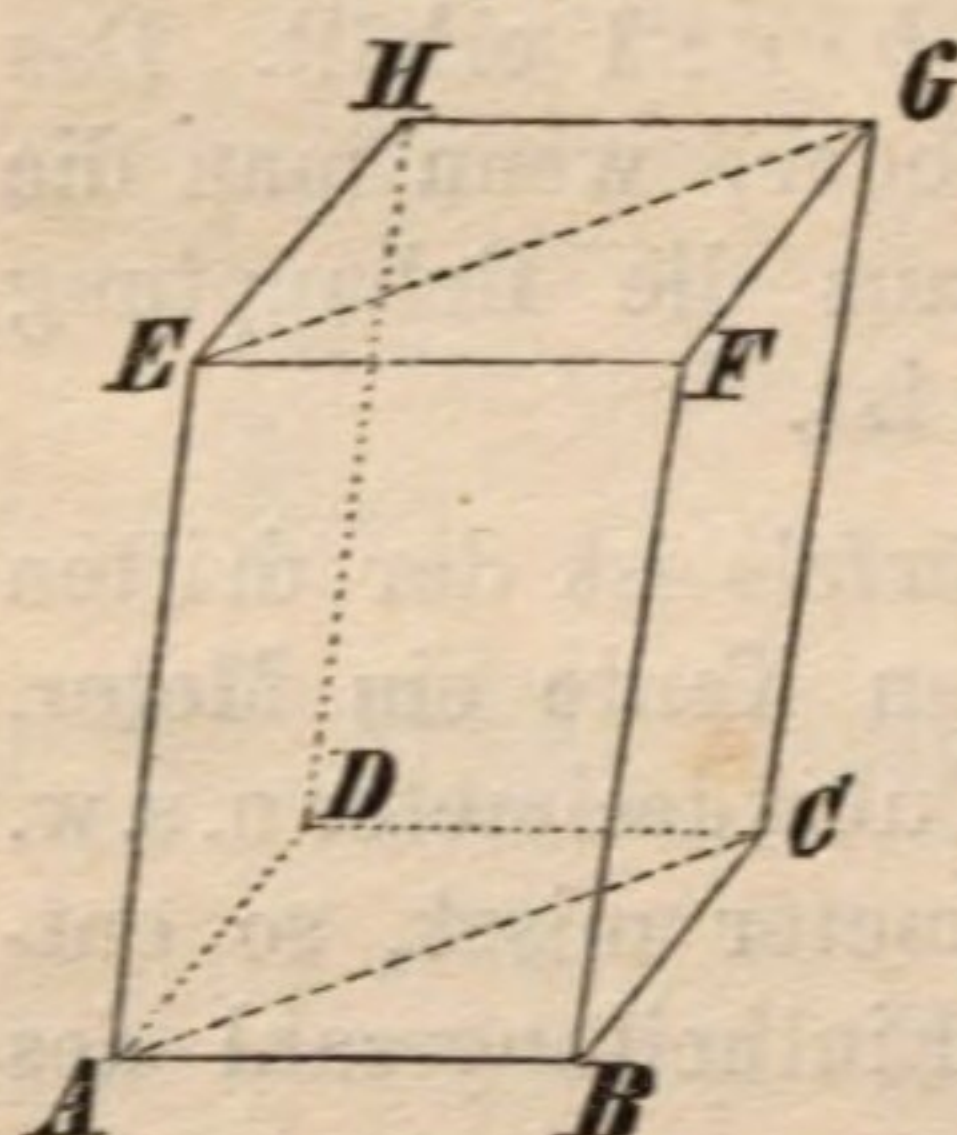


P mit Beibehaltung der Seite AD in ein Rechteck $AB'C'D$. Die Ebenen EAB' und $FD C'$ bestimmen alsdann ein anderes Prisma $AB'C'DEH'G'F$ oder P' , welches mit dem gegebenen sowohl gleiche Grundfläche (g) und Höhe (h) als auch gleiches Volum (v) hat. Das letztere beweist man leicht durch die Congruenz der dreiseitigen Prismen $AB'BEH'H$ und $DC'CFG'G$. Es bleibt nämlich das eine oder das andere der Prismen P und P' übrig,

wenn man von dem Körper $AB'C'DEH'G'F$ das eine oder andere der genannten dreiseitigen Prismen abzieht. Das Volum von P ist also ebenso wie das Volum von P' gleich $g \cdot h$.

3. Die Grundfläche ist ein Dreieck ABC (Fig. 42). Man

Fig. 40.



lege durch die Kanten AE und CG Ebenen parallel mit den gegenüberliegenden Seitenflächen des Prismas und erhält ein Parallelepiped von gleicher Höhe, dessen Grundfläche $ABCD$ doppelt so gross ist als das Dreieck ABC . Das Parallelepiped besteht aus dem gegebenen Prisma P und einem andern P' , welches mit P die Grundfläche (g) congruent ($\triangle ABC \cong CDA$) und die Höhe (h) gleich hat. Die Prismen P und P' sind daher inhaltsgleich und weil das Volum des Parallelepipeds nach 2) $2 g \cdot h$

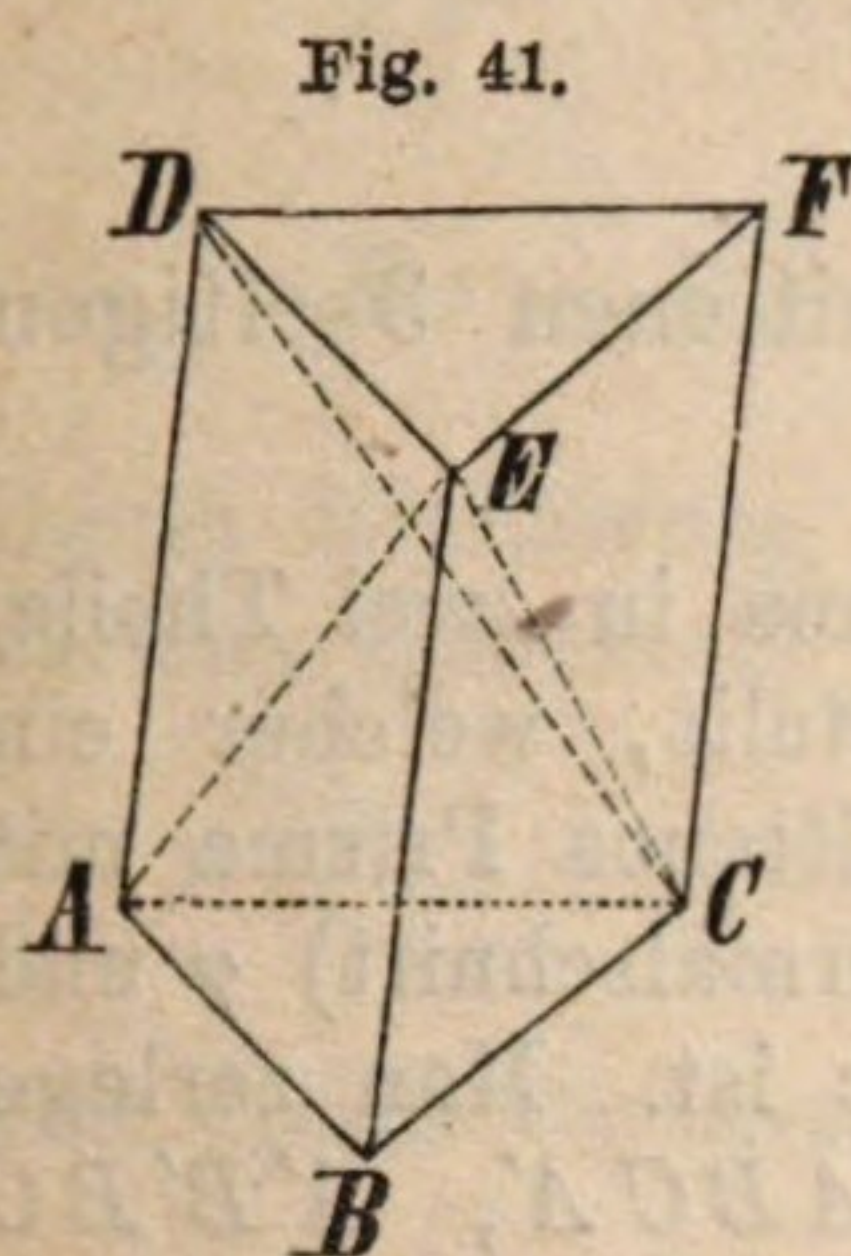
beträgt, so hat jedes dieser dreiseitigen Prismen das Volum $g \cdot h$, womit die Behauptung erwiesen ist.

4. Die Grundfläche ist ein Vieleck. Man zerlege das Prisma durch Diagonalebene in dreiseitige Prismen. Da der Satz für jedes der letzteren Prismen gilt, so ist er auch für ihre Summe richtig.

b) Das Volum einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile des Productes aus Grundfläche und Höhe.

Beweis. 1. Die Grundfläche ($ABC = g$ in Fig. 41) ist ein Dreieck. Man ziehe durch die Ecken A und C der gegebenen Pyramide $ABCE$ die Strecken AD und CF parallel und gleich mit BE und erhält das Prisma $ABCDEF$. Zieht man noch

die Diagonale DC der neu entstandenen Seitenfläche, so hat man zwei andere dreiseitige Pyramiden, $DEFC$ und $AEDC$ erhalten, welche mit der gegebenen zusammen das Prisma ausmachen. $AEDC$ ist nach



§ 43b gleich $ABCE$, weil beide congruente Grundflächen ($ABE \cong EDC$) und gleiche Höhe (den Abstand des Punktes C von der Ebene $ABED$) haben. $ABCE$ und $DEFC$ sind gleich, weil sie congruente Grundflächen ($ABC \cong DEF$) und gleiche Höhe (den Abstand der Ebenen ABC und DEF) haben. Da nun das Volum des dreiseitigen Prisma $g \cdot h$ ist (§ 44a), so hat jede der drei gleichen Pyramiden das Volum $\frac{g \cdot h}{3}$, was zu beweisen war.

2. Die Grundfläche ist ein Vieleck. Man zerlege die Pyramide durch Diagonalebene in dreiseitige Pyramiden. Da der Satz für jede der letzteren Pyramiden gilt, so ist er auch für ihre Summe richtig.

c) Aehnliche Pyramiden verhalten sich wie die dritten Potenzen homologer Strecken (Kanten, Diagonalen, Höhen...).

Beweis. γ und γ' , h und h' , k und k' mögen homologe Grundflächen, Höhen und Kanten der ähnlichen Pyramiden bezeichnen. Wenn $\frac{k'}{k} = \frac{h}{h'} = \frac{m}{n}$ (vergl. § 19a), so ist $\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{m^2}{n^2}$. Durch Multiplication findet man $\frac{\gamma \cdot h}{\gamma' h'} = \frac{\gamma \cdot h : 3}{\gamma' h' : 3} = \frac{m^3}{n^3}$, worin der Beweis gelegen ist.

d) Aehnliche Polyeder verhalten sich wie die 3^{ten} Potenzen homologer Strecken.

Beweis. Man theile die Polyeder von entsprechenden Ecken aus in ähnliche Pyramiden und beweise den Satz auf die bei der letzten Behauptung von § 19b angewendete Art.

§ 45. Berechnung des Rauminhaltes von Cylindern und Kegeln.

a) Das Volum eines Kreiscylinders (mit parallelen Grundflächen) ist gleich dem Producte aus Grundfläche und Höhe.

b) Das Volum eines Kreiskegels ist gleich dem dritten Theile des Productes aus Grundfläche und Höhe.

Beweise. Die Sätze § 44a und b gelten, wenn die Grundflächen regelmässige Vielecke von beliebiger Seitenzahl sind. Sie

bleiben daher auch richtig, wenn die Körper durch unbegrenzte Vermehrung dieser Seitenzahl in Cylinder oder Kegel übergehen.

§ 46. Aufgaben.

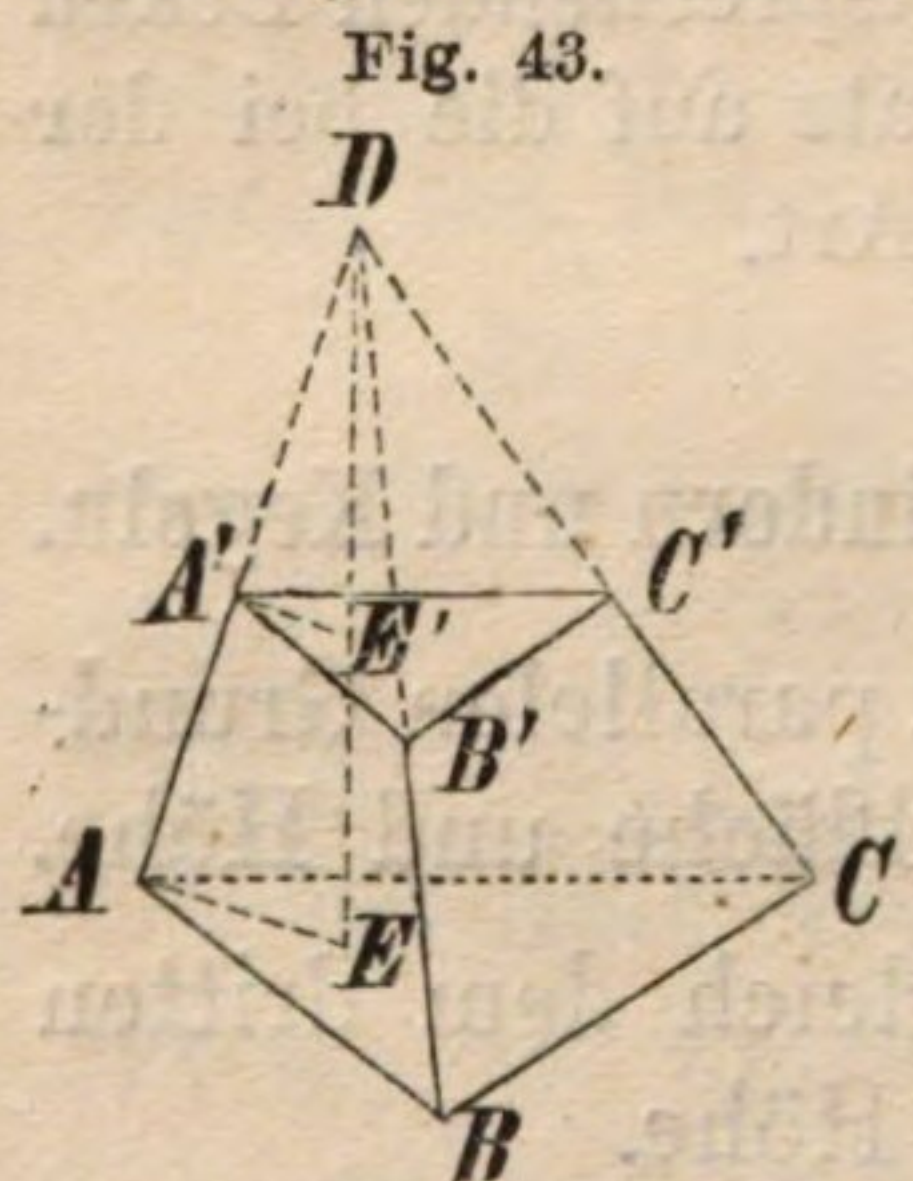
- a) Das Volum eines schief abgeschnittenen 3seitigen Prismas zu finden.

Ein Normalschnitt theilt ein solches Prisma in zwei Theile, von welchen Fig. 42 den obern Theil vorstellt, welcher ein gerades, schief abgeschnittenes Prisma mit der Grundfläche (dem Normalschnitt) γ und den Seitenkanten a, b, c ist. Man zerlege es in drei Pyramiden $ABCA'$, $A'B'BC$ und $A'B'C'C$. Das erste derselben hat das Volum $\gamma \cdot \frac{a}{3}$. Die Pyramiden $ABCA'$ und $A'B'BC$ verhalten sich, da sie gleiche Höhe haben (ihre Spitzen fallen in C zusammen), wie ihre Grundflächen, die Dreiecke ABA' und $A'B'B$ oder wie die Kanten a und b .

Daher ist das Volum von $A'B'BC$ durch $\gamma \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{b}{a} = \gamma \cdot \frac{b}{3}$ dargestellt. Aehnlich erhält man für die dritte Pyramide $\gamma \cdot \frac{c}{3}$, so

dass der Körper das Volum $\gamma \cdot \frac{a+b+c}{3}$ hat. Das nämliche Resultat erhält man für den untern Theil des Körpers und findet, dass das Volum des ganzen Prismas erhalten wird, wenn man den Normalschnitt γ mit dem dritten Theil der Summe seiner Seitenkanten multiplicirt.

- b) Das Volum einer abgestumpften Pyramide zu finden.



Wenn aus der Pyramide $ABCD$ durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt eine abgestumpfte Pyramide $ABCA'B'C'$ entsteht, so kann man ihr Volum durch die Differenz $\gamma \cdot \frac{h}{3} - \gamma' \cdot \frac{h'}{3}$ der zwei Pyramiden $ABCD$ und $A'B'C'D$ bestimmen. Dabei sind die Grundflächen ABC und $A'B'C'$ mit γ und γ' , die Höhen DE und DE' aber mit h und h' bezeichnet. Um hierin die Höhe $EE' = h - h' = x$ der abgestumpften Pyramide einzuführen verfährt man folgendermassen:

$$\gamma : \gamma' = h^2 : h'^2; \quad \sqrt{\gamma} : \sqrt{\gamma'} = h : h'$$

$$\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma'} : \sqrt{\gamma} = h - h' : h; \quad h = \frac{x \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma'}}$$

$$\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma'} : \sqrt{\gamma'} = h - h' : h'; \quad h' = \frac{x \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma'}}$$

Durch Einführung der Werthe von h und h' in die zuerst erhaltene Gleichung erhält man für das Volum der Pyramide

$$\frac{x}{3} \cdot \frac{\gamma \sqrt{\gamma} - \gamma' \sqrt{\gamma'}}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma'}} = \frac{x}{3} \frac{\sqrt{\gamma}^3 - \sqrt{\gamma'}^3}{\sqrt{\gamma} - \sqrt{\gamma'}}$$

und durch Division

$$\frac{x}{3} (\gamma + \sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{\gamma'} + \gamma').$$

c) Das Volum eines Kegelstumpfes durch die Radien r und r' seiner (parallelen) Grundflächen und die Höhe x auszudrücken.

Auflösung. Die für den Pyramidenstumpf gefundene Formel gilt auch für den Kegelstumpf (vergl. § 45). Setzt man für γ und γ' die Werthe πr^2 und $\pi r'^2$ ein, so ergibt sich

$$\frac{\pi x}{3} (r^2 + r \cdot r' + r'^2)$$

§ 47. Rauminhalt der Kugel.

a) Das Volum der Kugel ist $\frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$, wo r und d die Längenzahlen von Radius und Durchmesser sind.

Beweis. Man denke sich auf der Kugel eine Anzahl von Punkten angenommen und verbinde einen jeden derselben mit den benachbarten Punkten durch Strecken. Auf diese Weise entsteht ein der Kugel einbeschriebenes Polyeder, dessen Flächen Dreiecke sind. Die den Ecken zugehörigen Kugelradien sind Kanten von dreiseitigen Pyramiden, in welche das Polyeder zerlegt werden kann. Das Volum des Körpers wird gefunden, indem man das Volum aller dieser Pyramiden nach der Formel $\frac{\gamma \cdot h}{3}$ berechnet und die Werthe summirt. Um nun hieraus auf den Inhalt der Kugel schliessen zu können, nehmen wir die Kugel als die Grenzfigur an, in welche das Polyeder übergeht, wenn die Zahl seiner Ecken (auf der Kugel) ins Unbegrenzte wächst und zugleich die Kanten des Polyeders sämtlich unendlich klein werden. Die Höhen der besprochenen Pyramiden werden

alle dem Kugelradius r gleich, so dass $\frac{r}{3}$ als gemeinsamer Factor aller zu summirenden Volumina auftritt. Dieser Werth ist noch mit der gesamten Oberfläche der Grenzfigur, d. h. mit der Kugeloberfläche $4\pi r^2$ zu multipliciren, womit die Formel $\frac{4}{3}\pi r^3$ gefunden ist.

§ 48. Aufgaben.

a) Das Volum eines Kugelsectors ($ACBM$ in Fig. 44) zu finden, wenn die Höhe ($CD = h$) der zugehörigen Kugelhaube gegeben ist.

Auflösung. Denkt man sich die in § 45 angedeutete Summirung nur über die Oberfläche der Kugelhaube ABC in Fig. 44 ausgeführt, so findet man als Volum des zugehörigen Kugelsectors das Product aus der Oberfläche $2\pi r \cdot h$ der Haube und dem dritten Theile des Radius r . Dies giebt die Formel:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

b) Das Volum eines Kugelsegments zu finden, wenn seine Höhe ($CD = h$) gegeben ist.

Auflösung. Man ziehe von dem Volum $\frac{2\pi r^2 h}{3}$ des Sectors

$MACB$ (Fig. 44) das Volum $\frac{\varrho^2 \pi (r-h)}{3}$

des Kegels MAB ab ($AD = \varrho$). Bemerkt man noch, dass in dem bei A rechtwinkligen Dreieck CAE^* die Gleichung $\overline{AD}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{DE}$ oder $\varrho^2 = h(2r - h)$ gilt, so ergibt sich

$$V = \frac{\pi}{3} (2r^2 h - h(2r - h)(r - h)).$$

Die Ausrechnung der Klammer ergibt

$$V = rh^2\pi - \frac{h^3\pi}{3}.$$

c) Das Volum derjenigen Kugelschicht zu bestimmen, welche als Differenz zweier Kugelsegmente von den Höhen $CG = h$ und $CD = h'$ erscheint.

Auflösung.
$$V = r\pi \cdot (h^2 - h'^2) - \frac{\pi}{3} (h^3 - h'^3).$$

* E ist der Gegenpunkt von C und in der Figur nicht mehr sichtbar.

Fig. 44.

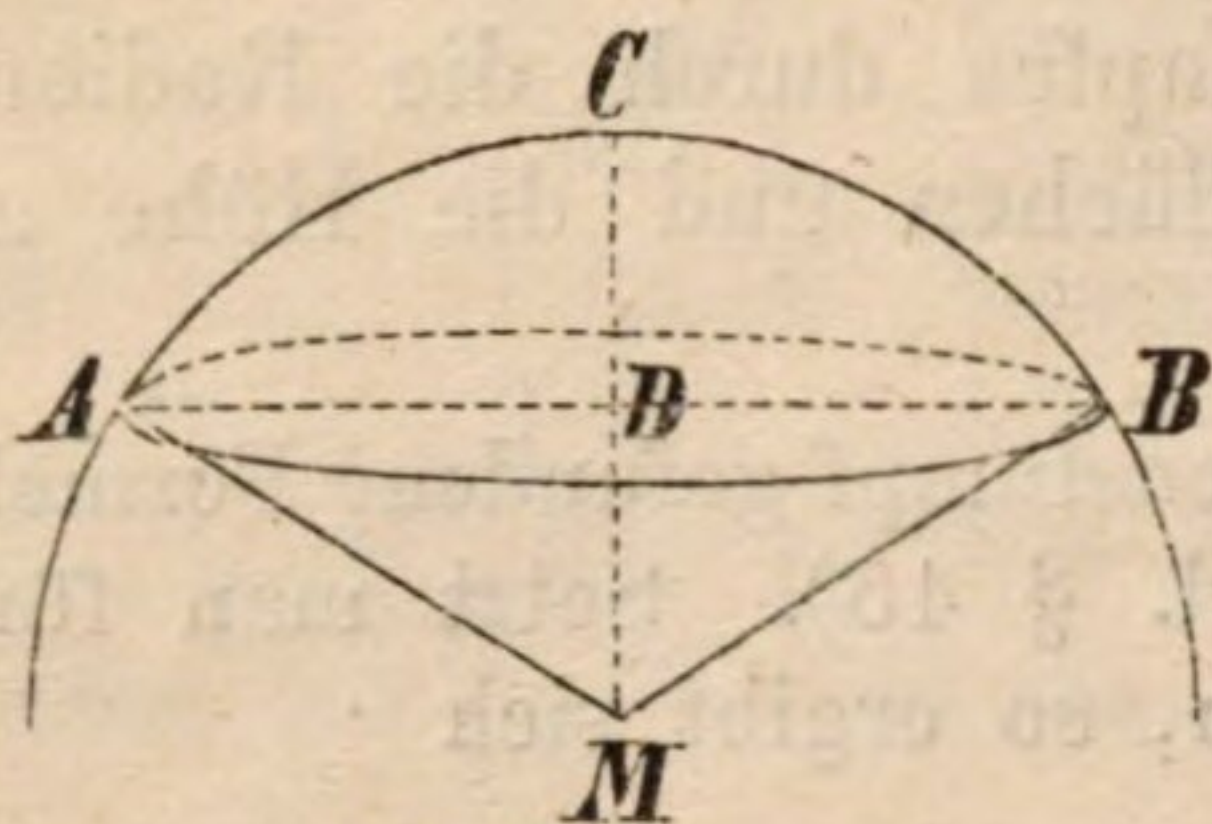
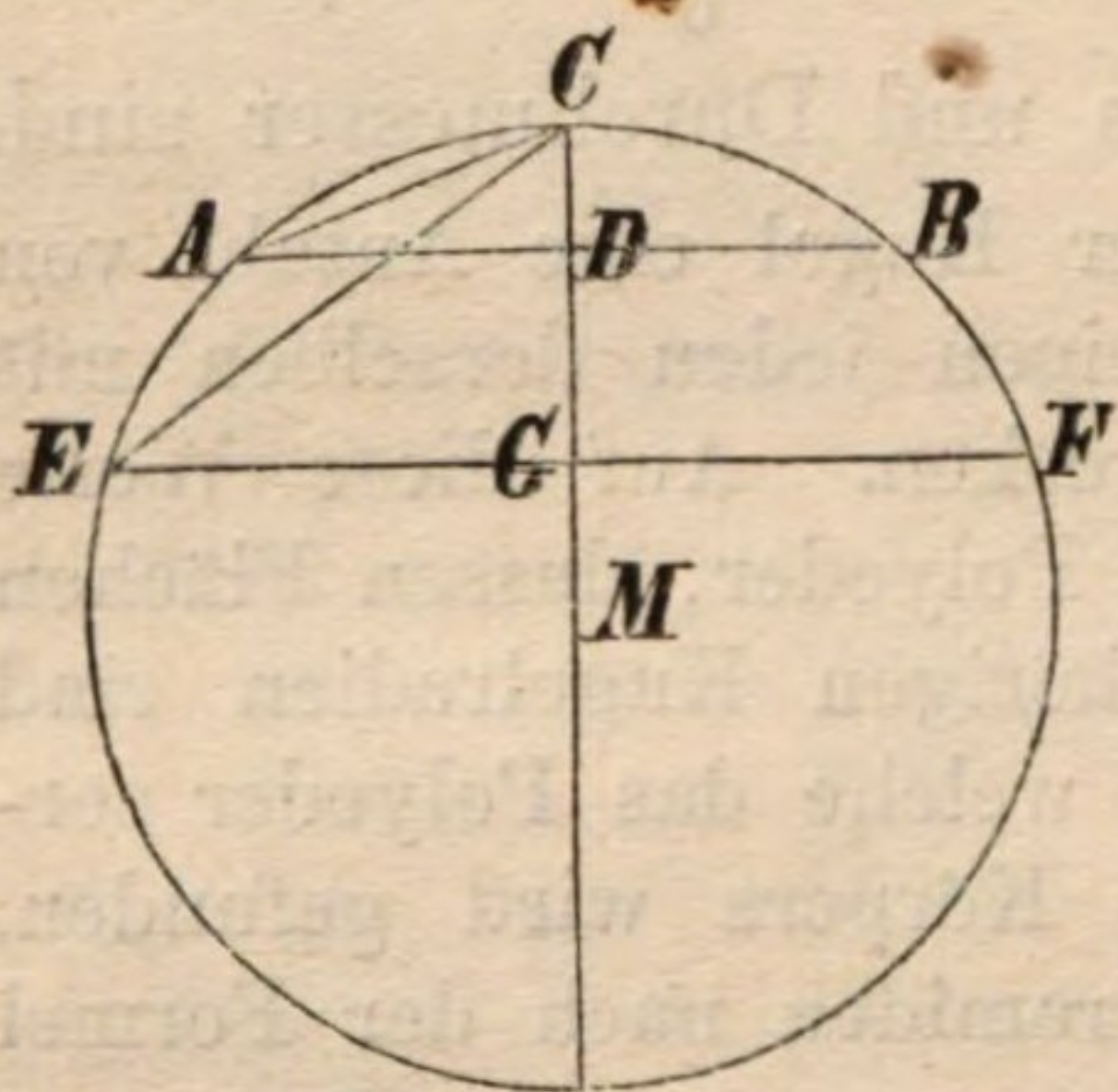


Fig. 45.



d) Man soll das in der vorigen Aufgabe berechnete Volum durch die Radien $EG = \varrho$, $AD = \varrho'$ und die Höhe $h - h' = x$ der Kugelschicht ausdrücken.

Auflösung. Bedenkt man, dass in der Formel für V in c) die beiden Ausdrücke $h^2 - h'^2$ und $h^3 - h'^3$ durch $h - h'$ oder x theilbar sind und dass der letzte der erhaltenen Quotienten nämlich $h^2 + hh' + h'^2$ auch in der Form $x^2 + 3hh'$ geschrieben werden kann, so hat man

$$V = \pi \cdot x (r \cdot (h + h') - \frac{1}{3} (x^2 + 3hh')).$$

Nun ist:

$$2r \cdot h = \overline{EC}^2 = \varrho^2 + h^2 \text{ und } 2rh' = \overline{AC}^2 = \varrho'^2 + h'^2,$$

und daher:

$$2r(h + h') - 2hh' = \varrho^2 + \varrho'^2 + x^2.$$

Durch Einsetzen erhält man

$$V = \frac{\pi x}{2} (\varrho^2 + \varrho'^2) + \frac{1}{6} \pi x^3.$$

§ 49. Uebungen.

Die in den folgenden Aufgaben enthaltenen Zahlen bedeuten beziehungsweise Meter, Quadratmeter und Cubikmeter oder die in einem andern zehntheligen Masse ausgedrückten Masszahlen von Längen, Flächen und Körperräumen.

1) Welchen Cubikinhalt hat eine gerade sechsseitige Säule von der Höhe 32, wenn der Umring der regelmässigen Grundfläche 5,4 beträgt?

2) Der Cubikinhalt eines Prisma mit quadratischer Basis beträgt 48,654, seine Höhe misst 8,5; wie gross ist die Seite der Grundfläche?

3) Der Cubikinhalt eines rechteckigen Parallelepipedons beträgt 364,5, drei an einander stossende Kanten verhalten sich wie 2 : 3 : 18, wie gross ist die Oberfläche des Körpers?

4) Ein Kasten mit rechteckiger Grundfläche hat den Inhalt 131,625 und die Höhe 4,5. Wie gross sind die Seiten der Grundfläche, wenn ihre Differenz 2 ist?

5) Ein gerades dreiseitiges Prisma von der Höhe 5 hat ein Gewicht von 918 Kilogramm, wie gross ist die Seite der regelmässigen Grundfläche, wenn das spezifische Gewicht des Körpers 4 ist? (1 Cubikmeter Wasser wiegt ein Gramm.)

6) Wie viele Würfel von der Seitenlänge 0,3 lassen sich aus einem andern von der Seite 2,4 bilden?

7) Die Summe der Kante und der Diagonale eines Würfels sei gleich s . Welchen Ausdruck erhält man für den Cubikinhalt I desselben?

8) Wie gross ist die Seite eines Würfels, wenn dessen Cubikinhalt α) 248,858189, β) $\frac{5}{8}$ beträgt?

9) Die folgenden Aufgaben handeln von einer geraden Pyramide mit regelmässiger Grundfläche. Es bedeutet: g die Grundkante, h die Höhe der Pyramide, k die Seitenkante derselben, σ den Inhalt einer Seitenfläche, ω die Oberfläche und V das Volumen. In den Aufgaben 9 bis 14 ist die Grundfläche quadratisch. Wie gross ist V , wenn: $\alpha)$ $g = 2,3$ und $h = 8,7$. $\beta)$ $g = 25,723$ und $h = 13,786$.

10) Wie gross ist V , wenn: $\alpha)$ $g = 3,2$ und $k = 15,8$. $\beta)$ $g = 8$ und $k = 5$.

11) Wie gross ist h und V , wenn: $\alpha)$ $g = 6,6$ und $\omega = 116,16$. $\beta)$ $g = 4,2$ und $\omega = 24,99$?

12) Wie gross ist h , wenn: $\alpha)$ $g = 6$ und $V = 84$. $\beta)$ wenn $g = 11,6$ und $V = 1347,92$?

13) Wie gross ist h und V , wenn: $\alpha)$ $g = 3$ und $\sigma = 37,5$. $\beta)$ $g = 24$ und $\sigma = 180$?

14) Wie gross ist g , wenn $V = 58,9$ und $h = 9,5$?

15) Wie gross ist k und g , wenn $k = 2g$ und $V = 96$? Die Grundfläche sei ein regelmässiges Sechseck.

16) Wenn k die Kantenlänge eines der regelmässigen Polyeder bezeichnet, so findet man für das Volumen

$$\alpha) \text{ des Tetraeders: } \frac{k^3}{12} \cdot \sqrt{2},$$

$$\beta) \text{ des Octaeders: } \frac{k^3}{3} \cdot \sqrt{2},$$

$$\gamma) \text{ des Ikosaeders: } \frac{5k^3}{12} (3 + \sqrt{5}),$$

$$\delta) \text{ des Dodekaeders: } \frac{k^3}{4} (15 + 7 \cdot \sqrt{5}).$$

Man leite diese Ausdrücke her.

Andeutung. Bei β , γ , δ setze man den Körper aus mehreren Pyramiden zusammen, deren Höhen gleich dem Abstand der Flächen vom Mittelpunkte des Polyeders gleich sind. Vergleiche § 30,3 und § 31,4.

17) Zwei ähnliche Gefässe von prismatischer Form fassen zusammen $13\frac{1}{2}$ Liter. Die Höhe des einen beträgt 18cm , die des andern 24cm . Wie viel fasst jedes?

18) Die Volumina zweier ähnlichen Prismen sind 64 und 27, die Differenz zweier homologer Kanten ist 2; wie gross sind diese Volumina?

19) Die Volumina zweier ähnlichen Pyramiden sind 54,872 und 5,832, eine Kante des ersteren misst 3,8. Wie gross ist die entsprechende Kante der andern Pyramide?

20) Wie gross ist das Volumen eines Cylinders, wenn die Höhe 12 und der Halbmesser 1,5 ist?

21) Das Volumen eines Cylinders durch den Umring p und die Höhe h auszudrücken.

22) Die Höhe eines Cylinders aus dem Volumen 942 und dem Halbmesser 3,75 zu berechnen.

23) Das Volumen eines Cylinders durch die Oberfläche ω und den Durchmesser d auszudrücken.

24) Das Volumen eines geraden Kreiskegels aus dem Halbmesser 1,5 der Grundfläche und der Höhe 6 zu berechnen.

25) Das Volumen eines geraden Kegels aus dem Umringe 2,512 der Grundfläche und der Kante 2 zu berechnen.

26) Die Höhe eines geraden Kegels aus dem Durchmesser 6,4 der Grundfläche und dem Volumen 160,768 zu berechnen.

27) Das Volumen eines geraden Kegels durch die Oberfläche ω und die Mantelfläche μ auszudrücken.

28) Das Volumen eines Pyramidenstumpfes aus den Flächen 16 und 9 der beiden Grundflächen und der Höhe 8,7 zu berechnen.

29) Das Volumen eines Pyramidenstumpfes durch die Seiten g und g' der quadratischen Grundflächen und die Höhe h auszudrücken.

30) Das Volumen einer abgekürzten geraden Pyramide aus den Seiten 4 und 2,5 der quadratischen Grundflächen und der Seitenkante 6 zu berechnen.

31) Ein gerader Kegel, dessen Grundfläche den Radius 2,5 hat und dessen Kante 6,5 ist, soll parallel zur Grundfläche halbirt werden. Wie hoch wird der an der Grundfläche liegende Theil und wie lang ist der Radius des Schnittkreises.

32) Man soll das Volumen eines Kegelstumpfes aus der Höhe 5,7 und den Radien der beiden Grundflächen berechnen.

33) Ein Kessel ist oben 1,02^m und am Boden 0,84^m weit und 0,72^m hoch; wie viel Liter fasst derselbe.

34) Das Volumen eines Kegelstumpfes aus seiner Kante 5,2 und den Radien 3,4 und 1,4 der Grundflächen zu berechnen.

35) Wie gross ist der Cubikinhalt einer Kugel von dem Halbmesser α) 2,4. β) 0,45.

36) Wie gross ist der Durchmesser einer Kugel, wenn der Cubikinhalt beträgt: α) 381,5. β) 904,32.

37) Aus zwei eisernen Kugeln, deren Durchmesser 6 und 12 betragen, wird eine einzige Kugel gegossen; wie gross wird deren Halbmesser?

38) Das Volumen eines Kugelsectors durch den Radius r der Kugel und den Radius ρ desjenigen Kreises auszudrücken, welcher die dem Sector zugehörige Haube begrenzt.

39) Mit der Formel in § 48a ρ (Fig. 44) zu bestimmen, wenn das Volumen der Kugel 1149,763 und das Volumen des Sectors 44,222 ist.

Andeutung. Man berechne zuerst r .

40) Das Volumen eines Segments durch den Radius r der Kugel und den Halbmesser ρ des begrenzenden Kreises auszudrücken.

41) Die Höhe einer Kugelschicht beträgt 1,5; wie gross ist der Cubikinhalt der Schicht, wenn der Radius der Kugel 2,4 und der Abstand der grösseren Endfläche vom Centrum 0,4 ist.

42) Das Volum einer Kugelschicht nach § 48c zu berechnen, wenn $r = 2,4$, $h = 1,4$, $h' = 0,8$.

Vierter Cursus.

VIII. Abschnitt.

Körperliche Ecken.

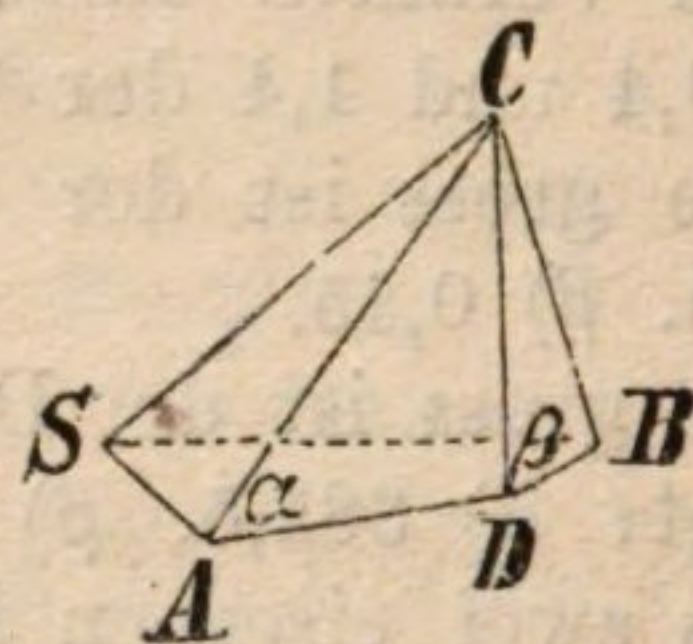
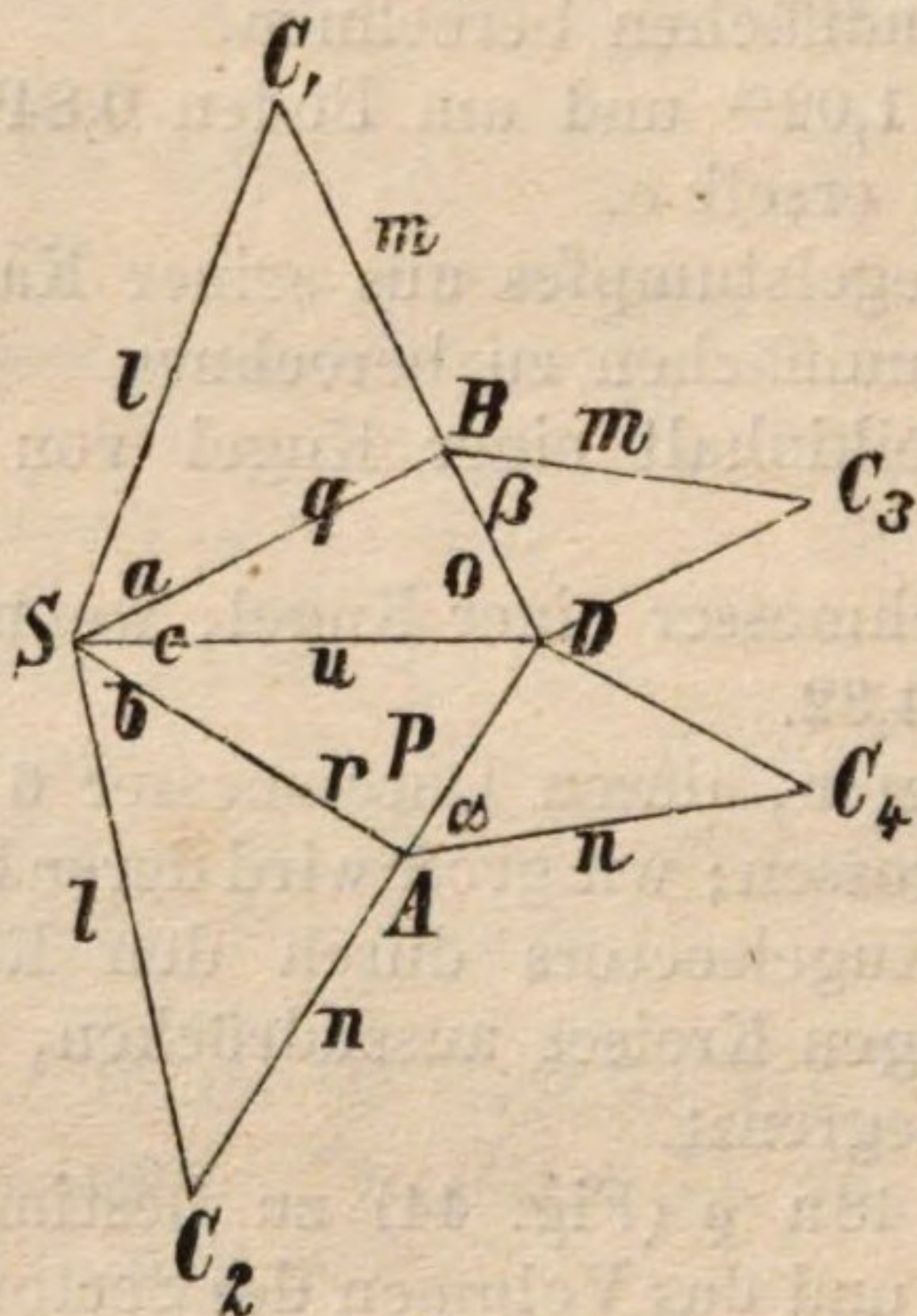
§ 50. Construction der dreiseitigen Ecke aus ihren Seiten.

a) Aufgabe. Die drei Seiten a, b, c einer körperlichen dreiseitigen Ecke seien gegeben; man soll die drei Winkel α, β, γ derselben durch Construction finden.

Auflösung. Um aus den drei Winkelfeldern a, b, c in Fig. 46, welche die Seiten einer körperlichen Ecke werden sollen, die letztere zu bilden, müssen die Winkelfelder a und b so lange um die Kanten SA und SB gedreht werden, bis sich die Strahlen

Fig. 46.

Fig. 47.



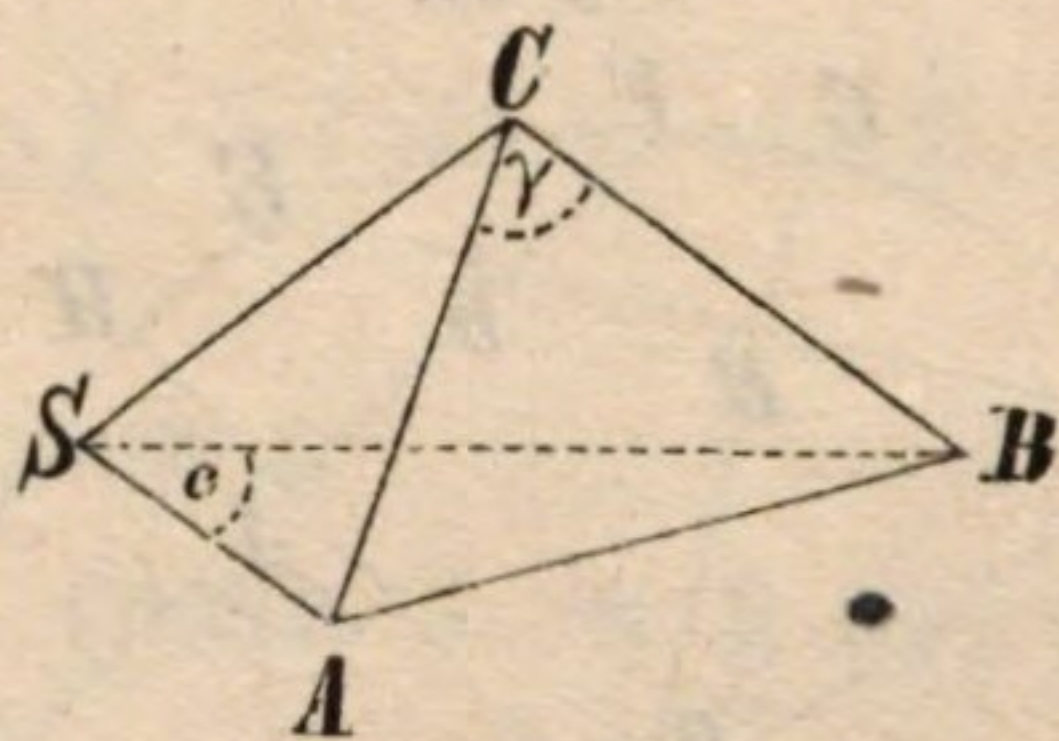
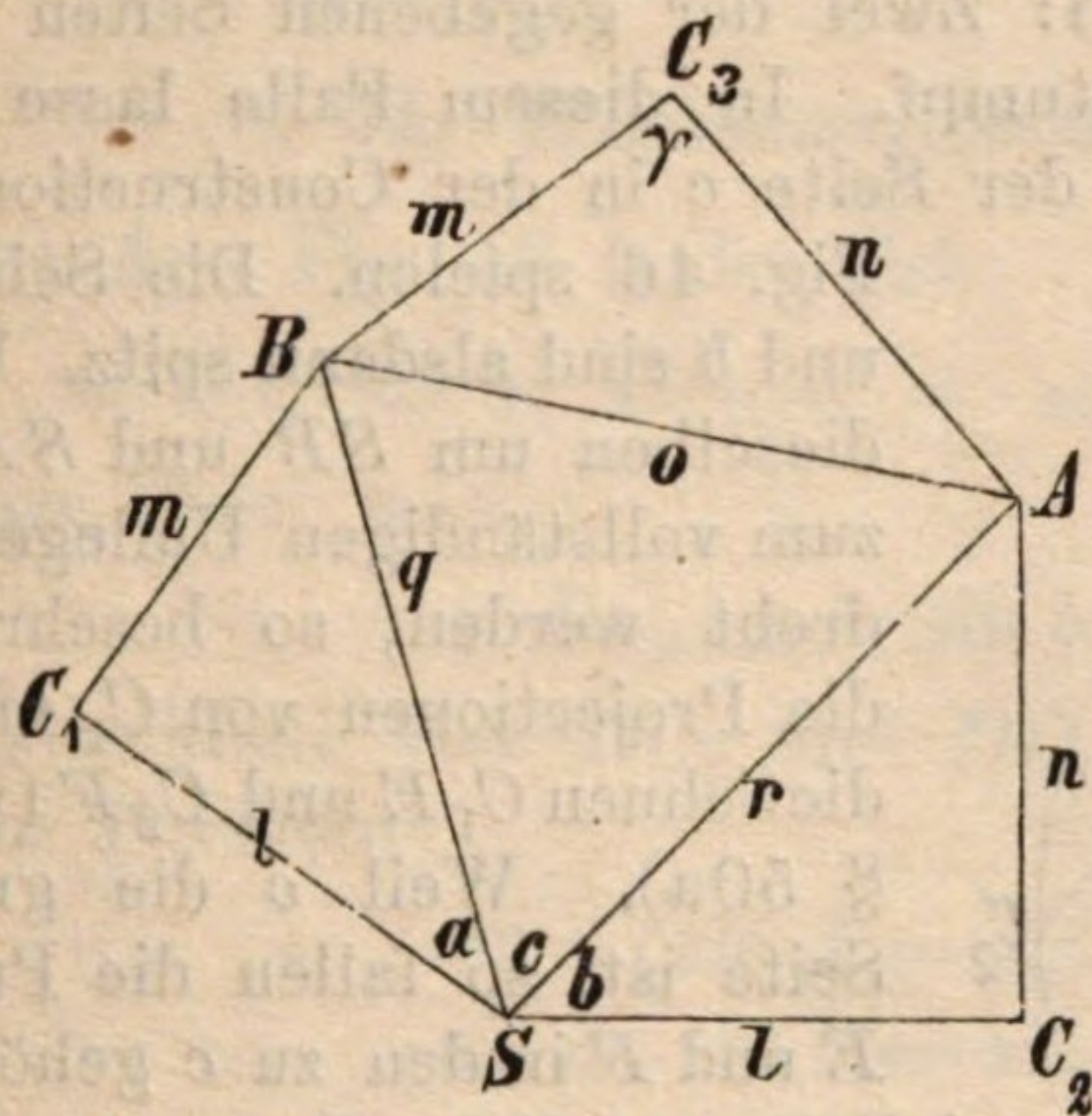
SC_1 und SC_2 zu einer Kante SC (Fig. 47) vereinen. Alsdann fallen je zwei Punkte zusammen, welche wie C_1 und C_2 von S gleichen Abstand haben. Bei dieser Drehung bewegen sich die Projectionen der Punkte C_1 und C_2 auf die Ebene ASB in den Geraden C_1B und C_2A , welche bezüglich senkrecht auf den Kanten SB und SA stehen und sich in einem Punkte D schneiden müssen. Eine Vereinigung der Punkte C_1 und C_2 zu einem Punkt C kann nur senkrecht über D stattfinden. Wenn nun Punkt C_1 durch die Drehung in die Normale von D fällt, so bildet er mit B und D ein rechtwinkliges Dreieck, von welchem die Cathete BD und die Hypotenuse BC_1 bekannt sind. Das

Dreieck kann also construirt werden und Fig. 46 zeigt dasselbe in der Lage BDC_3 , welche es nach einer Viertelsdrehung um die Axe BD einnimmt. Das analoge Dreieck auf der andern Seite ist ADC_4 . Da nun aber, wie in Anm. 1 bewiesen ist, die Längen DC_3 und DC_4 gleich sind, so schneiden die Bahnen der Punkte C_1 und C_2 die Normale des Punktes D in demselben Punkte C , in welchen auch die Punkte C_3 und C_4 zu liegen kommen, wenn man die Dreiecke DBC_3 und DAC_4 aufrichtet. Die körperliche Ecke ist somit gebildet, wie es Fig. 47 veranschaulicht und die Winkel α und β in Fig. 46 sind zwei Winkel der Ecke, weil ihre Schenkel bezüglich senkrecht auf den Kanten SA und SB stehen und somit einen Normalschnitt bilden.

Um den dritten Winkel γ zu finden, welcher der Seite c gegenüberliegt, benutze man eine andere Construction. Unter der Voraussetzung $SC_1 = SC_2$ (Fig. 48) errichte man die Senk-

Fig. 48.

Fig. 49.



rechten C_1B und C_2A . Werden nun wiederum die Seiten a und b bis zur Vereinigung der Punkte C_1 und C_2 in C um die Axen SB und SA gedreht (siehe die Figur 49), so entsteht ein Dreieck, welches die Ecken A , B , C hat und den Winkel γ bei C enthält. Dasselbe Dreieck ist auch im Netze (Fig. 48) in der Lage BC_3A zu sehen, welche es durch Niederlegen auf die Ebene des Papiers annimmt. Man hat zu seiner Construction nur $BC_3 = BC_1$ und $AC_3 = AC_2$ zu machen.

Anmerkungen. Für die Quadrate der Strecken DC_3 und DC_4 ergeben sich zunächst aus Fig. 46 die Werthe $m^2 - o^2$ und $n^2 - p^2$; ersetzt man hierin o^2 durch $u^2 - q^2$ und p^2 durch $u^2 - r^2$, so erhält man die Ausdrücke $(m^2 + q^2) - u^2$ und $(n^2 + r^2) - u^2$, welche beide $l^2 - u^2$ gleich sind. Hierin liegt der Beweis.

§ 51. Möglichkeit der Construction in § 50.

Damit aus drei Seiten eine körperliche Ecke gebildet werden könne, müssen die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sein.

I) Die Summe je zweier Seiten muss grösser sein als die dritte.

(Daraus folgt, dass auch die Differenz je zweier Seiten kleiner ist als dritte.)

II) Die Summe der drei Seiten muss kleiner als 360° sein.

Man schliesst daraus, dass dieselben Bedingungen von den Seiten jeder körperlichen dreikantigen Ecke befriedigt werden.

Beweis. Erster Fall: Zwei der gegebenen Seiten seien spitz, die dritte spitz oder stumpf. In diesem Falle lasse man die grösste Seite die Rolle der Seite c in der Construction der

Fig. 50.

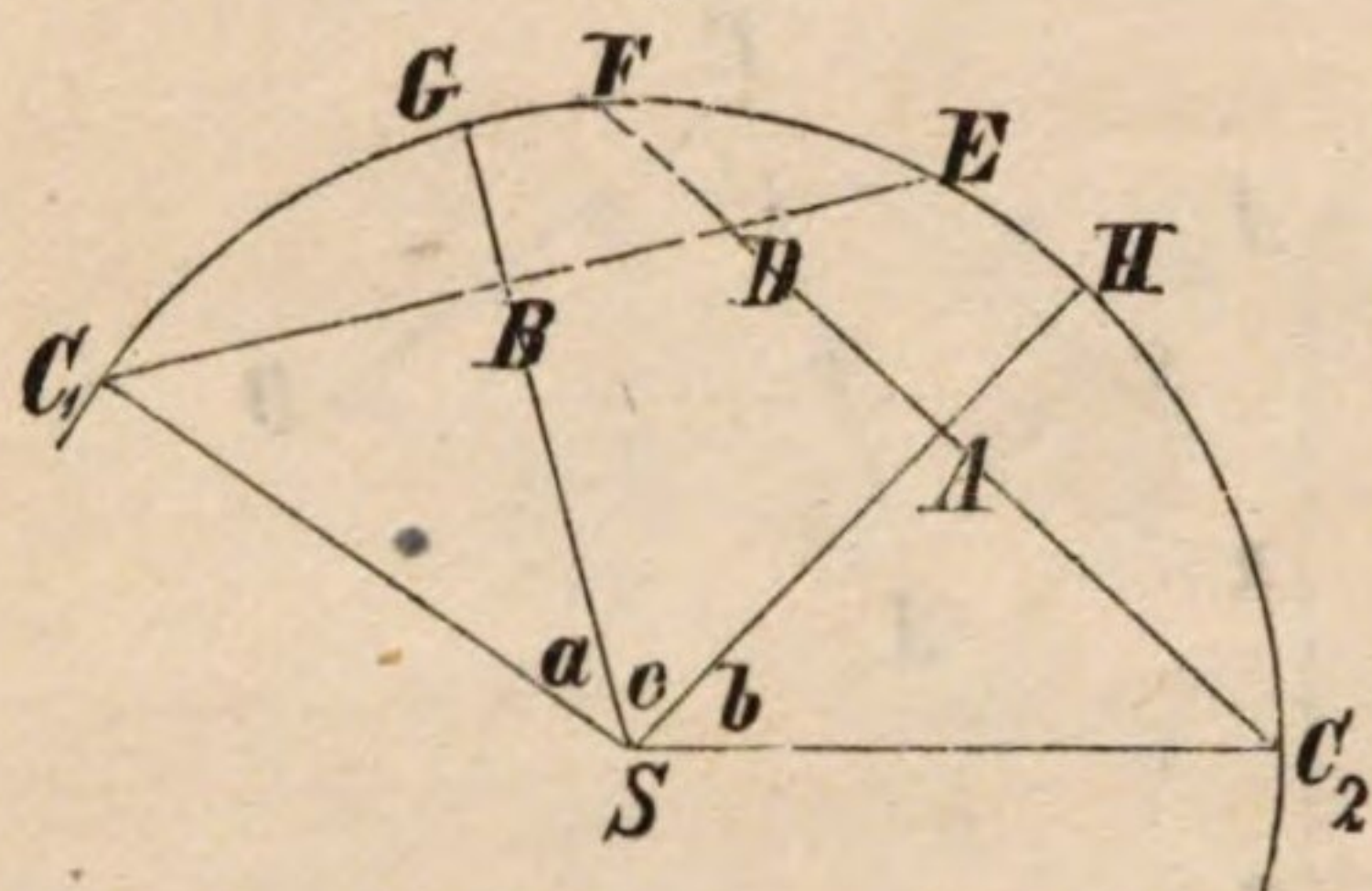


Fig. 46 spielen. Die Seiten a und b sind alsdann spitz. Wenn dieselben um SB und SA bis zum vollständigen Umlegen gedreht werden, so beschreiben die Projectionen von C_1 und C_2 die Sehnen C_1E und C_2F (vergl. § 50a). Weil c die grösste Seite ist, so fallen die Punkte E und F in den zu c gehörigen

Kreisbogen GH . Nun sind zwei Fälle möglich. Im ersten Falle liegt F nicht zwischen G und E . Alsdann existirt auch kein Schnittpunkt der Sehnen C_1E und C_2F und die Bildung der Ecke kann nicht ausgeführt werden. Im zweiten Falle liegt F zwischen G und E . Alsdann haben die Sehnenhälften BE und AF einen Punkt D gemein, der in dem Winkelfeld c liegen muss. Die Construction der Ecke nach § 50a ist möglich und man erkennt, dass in diesem Falle die Seiten a und b in dem Winkelfelde FSE übereinanderfallen, oder dass $a + b > c$. Die beiden übrigen Bedingungen $b + c > a$ und $c + a > b$ sind von selbst erfüllt, weil c als die grösste Seite angenommen wurde. Die in Klammern geschlossene Beziehung zwischen den Seiten ergibt sich hieraus leicht. $c - a < b$ folgt z. B. aus $c < a + b$. Die Bedingung II) ist ebenfalls von selbst erfüllt, weil zwei Seiten als spitz angenommen wurden.

Zweiter Fall: Zwei Seiten a und b seien stumpf, die dritte c kann spitz oder stumpf sein. Man construiere zuerst die Scheitelecke, deren Seiten $a' = 180 - a$, $b' = 180 - b$, $c' = c$ sind. Mit dieser Scheitelecke ist auch die gesuchte Ecke construiert. Sind α' , β' , γ' die Winkel der ersteren, so sind die Winkel der zweiten $180 - \alpha'$, $180 - \beta'$, γ' . Aus den Bedingungen I) und II), welche für die Scheitelecke erfüllt sein müssen, folgen aber dieselben Bedingungen für die gesuchte Ecke. Die Bedingung $b + c > a$ zum Beispiel verwandle man durch Einsetzen in $180 - b' + c' > 180 - a'$ d. h. $180 + a' + c' > 180 + b'$ oder $a' + c' > b'$. Aus der Richtigkeit der letzten Ungleichung (erster Fall) folgt auch die erste. Ebenso verwandle man $a + b + c < 360^\circ$ in $180 - a' + 180 - b' + c' < 360^\circ$, d. h. $360^\circ + c' < 360^\circ + a' + b'$ oder $c' < a' + b'$. Wiederum folgt aus der letzten, welche nach dem ersten Falle erfüllt sein muss, die Gültigkeit der ersten $a + b + c < 360^\circ$.

§ 52. Trigonometrische Beziehungen.

a) Aus Fig. 46 findet sich:

$$m = l \cdot \sin a; \quad DC_3 = m \cdot \sin \beta = l \sin a \cdot \sin \beta.$$

Ebenso findet man

$$DC_4 = l \cdot \sin b \cdot \sin \alpha.$$

Die Gleichheit von DC_3 und DC_4 (Anm. 1 in § 50) führt zu den Formeln

$$\sin a \cdot \sin \beta = \sin b \cdot \sin \alpha;$$

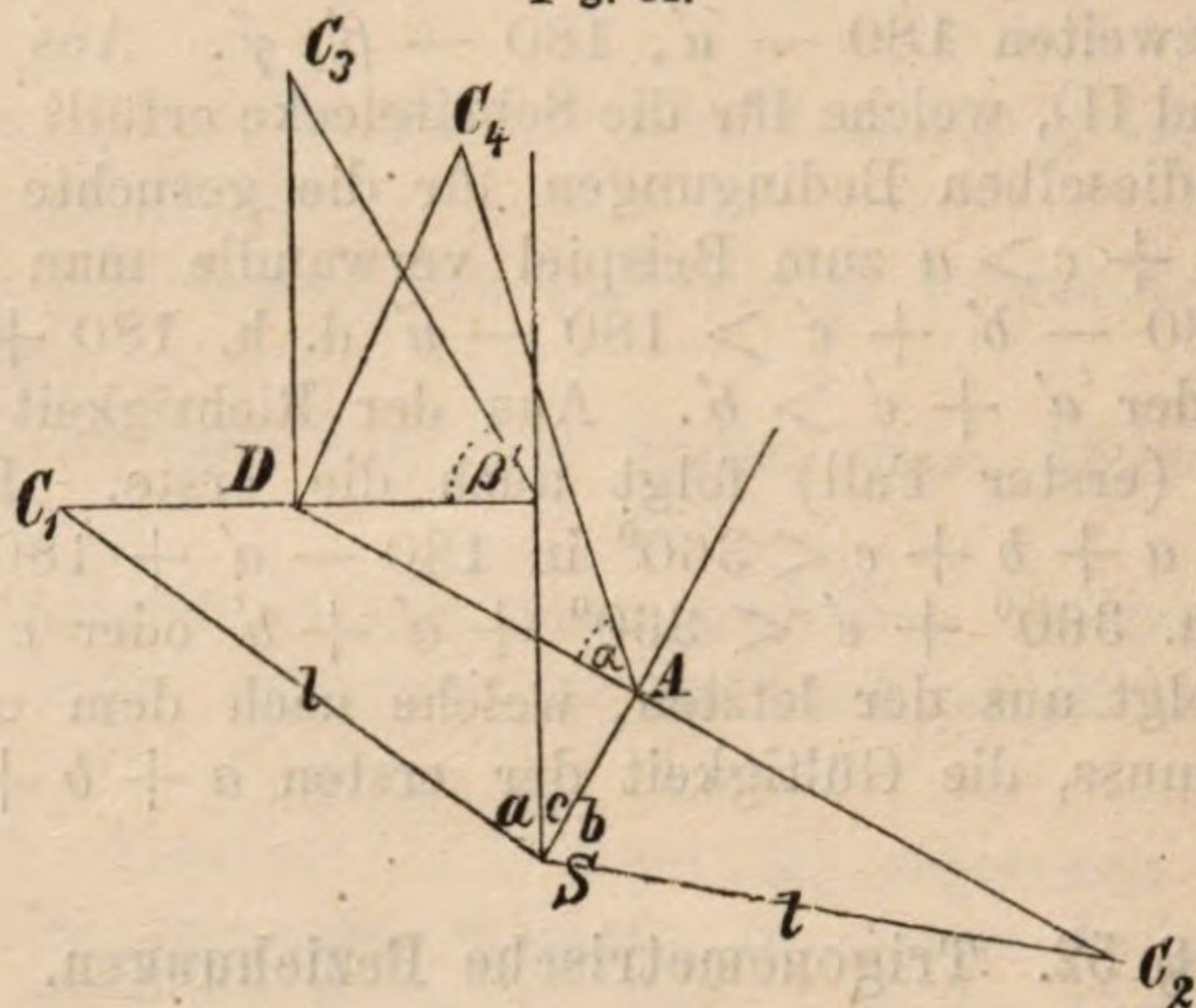
$$\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Beweis für die allgemeine Gültigkeit der Gleichung in a).
1) Soll die Formel in a) für beliebige Seiten und ihre Gegenwinkel einer Ecke mit lauter spitzwinkligen Seiten Geltung haben, so muss die Bedingung der Fig. 46, dass der Punkt D innerhalb des Winkelfeldes c zu liegen komme, wegfallen. Man wiederhole deshalb die Betrachtungen an Fig. 51, wo man findet: $\sin \alpha : \sin \beta' = \sin a : \sin b$. Nun ist aber β' der Nebenwinkel von dem Normalschnitt β des zwischen den Flächen a und c eingeschlossenen Keilwinkels der körperlichen Ecke. Da $\sin \beta' = \sin \beta$, so folgt auch hier: $\sin \alpha : \sin \beta = \sin a : \sin b$.

2) Die körperliche Ecke habe lauter stumpfe Seiten. Eine der Nebenecken hat alsdann die Seiten $c' = c$, $a' = 180 - a$, $b' = 180 - b$ und die Winkel $\gamma' = \gamma$, $\alpha' = 180 - \alpha$, $\beta' = 180 - \beta$. Da diese Ecke eine stumpfe Seite c' und zwei spitze

Seiten a' und b' hat, so fällt bei der in Fig. 48 dargestellten Construction der Punkt D in die Seite c' , wenn man diese grösste Seite in die Mitte legt. Aus der Entwicklung in a) hat man also: $\sin \alpha' : \sin \beta' = \sin a' : \sin b'$. Durch Einsetzen der Werthe

Fig. 51.



für α', β', a', b' erhält man: $\sin \alpha : \sin \beta = \sin a : \sin b$. Ebenso beweist man mit Hülfe der andern Nebenecken die Proportionen:

$$\sin \alpha : \sin \gamma = \sin a : \sin c \text{ und } \sin \beta : \sin \gamma = \sin b : \sin c.$$

3) Die gegebene Ecke habe eine spitze und zwei stumpfe Seiten. Alsdann hat eine Nebenecke drei spitze Seiten. Aus der Gültigkeit der Proportion für je zwei Seiten dieser Nebenecke und die Gegenwinkel dieser Seiten folgt durch Einsetzen die Gültigkeit der analogen Proportionen für das ursprüngliche Dreieck.

4) Das gegebene Dreieck habe eine stumpfe und zwei spitze Seiten. Alsdann hat eine der Nebenecken drei stumpfe Seiten. Man schliesse wie in 3) mit Benützung des in 2) Bewiesenen.

b) Aus Fig. 48 findet sich, indem man das Quadrat der Strecke o aus beiden Dreiecken BSA und BC_3A berechnet durch Gleichsetzung beider Werthe:

$$m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos \gamma = q^2 + r^2 - 2qr \cdot \cos c.$$

Nimmt man die Länge l als Einheit an, so hat man

$$q^2 = 1 + m^2 \text{ und } r^2 = 1 + n^2$$

Die Gleichungen gehen dadurch über in

$$- 2mn \cdot \cos \gamma = 2 - 2qr \cdot \cos c.$$

Unter der Voraussetzung $l = 1$ ist $m = \operatorname{tg} a$, $n = \operatorname{tg} b$,

$$q = \frac{1}{\cos a}, \quad r = \frac{1}{\cos b}, \text{ folglich}$$

$$-\cos \gamma \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b = 1 - \frac{\cos c}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$-\cos \gamma \cdot \sin a \sin b = \cos a \cdot \cos b - \cos c$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma.$$

Beweis der allgemeinen Gültigkeit der Gleichung unter b). Die Lagenverhältnisse der Fig. 50 bleiben dieselben, solange die Seiten a und b spitz sind, die dritte Seite c mag spitz oder stumpf sein. Die Untersuchung wird dadurch einfacher. 1) Es folgt schon aus der auf Fig. 50 Bezug nehmenden Ableitung unter b), dass die dort aufgeführte Gleichung für den cosinus einer jeden Seite der dreiseitigen körperlichen Ecke gilt, wenn diese lauter spitze Seiten hat. Der Rest der Untersuchung — für die bei a) unterschiedenen Fälle 2) bis 4) — ist der vorigen ganz analog. Auch hier folgt aus der Gültigkeit der fraglichen Gleichung für eine Ecke, die Richtigkeit der analogen Gleichung

$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos \gamma'$$

für irgend eine der Nebenecken.

§ 53. Sätze über die Seiten und Winkel der dreiseitigen Ecken.

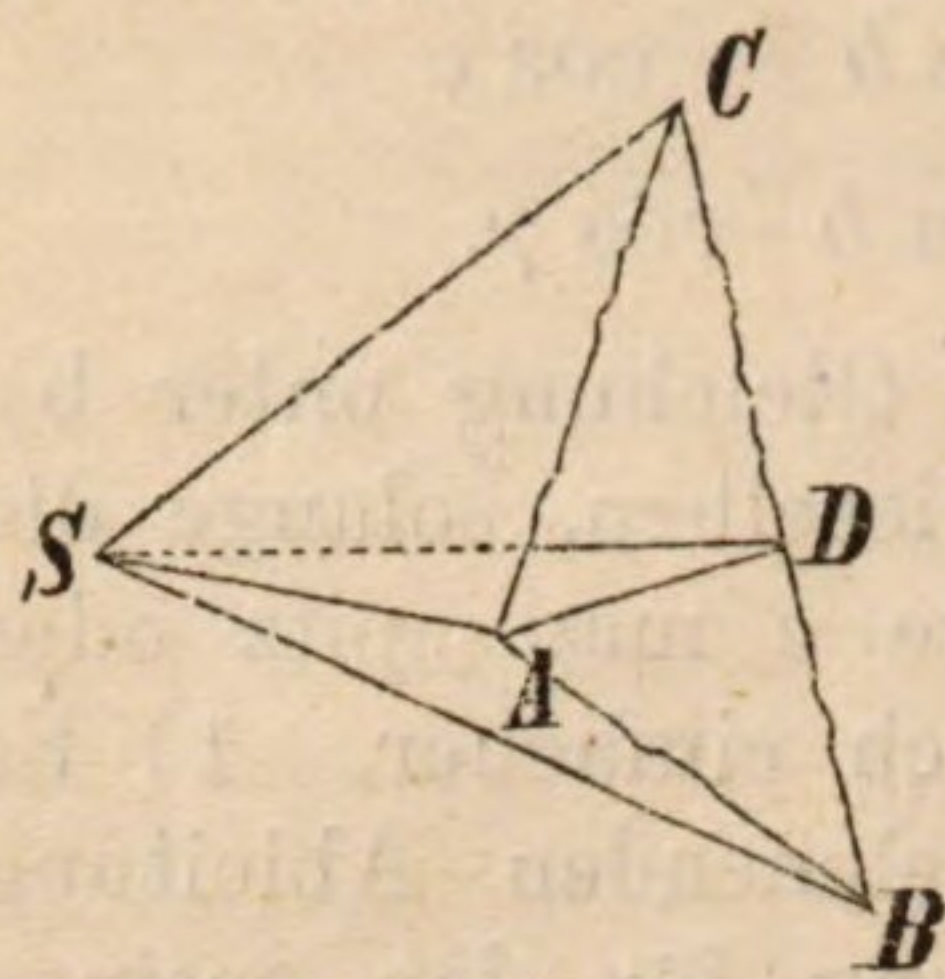
a) Wenn in einer dreiseitigen Ecke zwei Seiten gleich sind, so sind auch die Gegenwinkel gleich und umgekehrt.

Beweis. Wenn die Seiten a und b der Ecke in Fig. 47 gleich sind, so sind die rechtwinkligen Dreiecke SBC und SAC congruent, weil sie die Hypotenuse und einen spitzen Winkel entsprechend gleich haben. Man schliesst daraus die Gleichheit der Strecken CB und CA und die Congruenz der rechtwinkligen Dreiecke BCD und ACD . Hieraus ergibt sich die Gleichheit der Winkel α und β . — Werden aber die Winkel α und β als gleich angenommen, so schliesse man zuerst auf die Congruenz der Dreiecke BCD und ACD und sodann durch die Gleichheit der Strecken CB und CA auf die Congruenz von SBC und SAC und die Gleichheit von a und b .

Anmerkung. Man bemerke auch zu späterer Anwendung, dass unter der Bedingung $a = b$ sowohl die Strecken SA und SB als auch die Strecken DA und DB einander gleich sind, so dass die Figur $SADB$ ein Deltoid ist und die Diagonale SD die Seite c halbt.

b) In jeder dreiseitigen Ecke liegt dem grösseren Winkel auch die grössere Seite gegenüber und umgekehrt.

Beweis. Wenn in der Ecke $S(ABC)$ (Fig. 52) der Keilwinkel an der Kante SA grösser ist als derjenige an der Kante SB , so mache man den Keilwinkel $D(SA)B$ dem Winkel $D(SB)A$ gleich. Die Ecke $S(ABD)$ ist nach a) gleichschenkelig, d. h. $DSA = DSB$. Aus § 51 folgt für die Ecke $S(ADC)$, dass $CSD + DSA > CSA$ und durch Einsetzen von DSB für DSA ergibt sich die Behauptung $CSB > CSA$. Die Umkehrung dieses Satzes wird indirect bewiesen, indem man noch den Satz a) zu Hülfe nimmt.



§ 54. Congruenz dreiseitiger Ecken. Erster Congruenzsatz.

a) Wenn zwei dreikantige Ecken die drei Seiten entsprechend gleich haben, so sind sie congruent oder symmetrisch gleich.

Beweis. Die § 50 beschriebene Bildung einer dreikantigen Ecke aus den drei Seiten a, b, c kann man auf zwei Weisen ausführen, nämlich so, dass die Ecke über die Ebene ASB (Fig. 46) oder unter dieselbe zu liegen kommt. Doch sind die Winkel beider Ecken gleich, nämlich so gross, wie sie durch die Construction in § 50 gefunden sind. Die beiden Ecken E und E' sind aber trotz der Gleichheit aller entsprechenden Stücke nicht congruent, weil sie, wie leicht nach § 12 Anm. zu sehen, von verschiedenem Sinne sind, sondern nur symmetrisch gleich. Wenn nun zwei Ecken in den Seiten a, b, c übereinstimmen und man sie so legt, dass die Seiten c mit entsprechenden Schenkeln in der Lage ASB zusammenfallen, so müssen entweder beide Ecken mit E oder beide mit E' , oder endlich eine mit E und die andere mit E' zusammenfallen, dass heisst, diese Ecken sind entweder congruent oder symmetrisch gleich.

§ 55. Satz über die gleichschenklige Ecke.

a) In jeder gleichschenkligen Ecke fallen folgende Ebenen zusammen:

- 1) die Ebene, welche durch die Scheitelkante* senkrecht auf die Grundseite gefällt ist;
- 2) die Ebene, welche durch die Scheitelkante und die Halbirungslinie der Grundseite gelegt ist;

* Schnittlinie der gleichen Seiten.

- 3) die Ebene, welche in der Halbirungslinie der Grundseite senkrecht errichtet ist;
- 4) die Ebene, welche den Winkel an der Scheitелkante halbt.

Beweis. In Fig. 47 stellt CSD diejenige Ebene vor, welche durch die Kante SC senkrecht auf die Seite c gelegt ist, denn CD ist eine Normale zu dieser Seite. Wenn aber $a = b$, so ist SD die Halbirungslinie der Grundseite c (§ 53 Anm.).

CSD stellt also auch die Ebene vor, welche durch die Halbirungslinie der Grundseite und die Scheitелkante gelegt ist und: CSD stellt auch die Ebene vor, welche die Grundseite c senkrecht halbt.

Aus der Gleichheit der drei Seiten folgt aber, dass die Ecken $S(ACD)$ und $S(BCD)$ symmetrisch gleich sind. Daraus ergibt sich die Gleichheit ihrer entsprechenden Winkel an der Kante SC : CSD stellt also auch die Ebene vor, welche den Keilwinkel an der Kante SC halbt.

§ 56. Die symmetrisch vierseitige Ecke.

Wenn man, wie im Beweis zu § 54a angegeben wurde, aus drei gegebenen Seiten a , b , c die beiden symmetrisch gleichen Ecken bildet, welche die Seite c gemein haben, so bilden dieselben eine vierkantige Ecke, welche zwei Paare gleicher Nachbarseiten hat. Die Seite c ist eine Diagonalebene dieser Ecke. Die Ecke wird eine symmetrische vierseitige Ecke genannt. Für eine solche Ecke gilt der Satz:

a) In jeder symmetrisch vierseitigen Ecke fallen folgende Ebenen mit der Diagonalebene c zusammen:

- 1) die Ebenen, welche die von gleichen Seiten eingeschlossenen Winkel halbieren;
- 2) die Ebenen, welche durch die Kanten dieser Winkel senkrecht zur zweiten Diagonalseite gelegt sind;
- 3) diejenige Ebene, welche die zweite Diagonalseite senkrecht halbt.

Von zwei convergenten Linien sagt man, sie seien symmetrisch zu der Ebene gelegen, welche den gebildeten Winkel senkrecht halbt. Von zwei sich schneidenden Ebenen sagt man, dass sie symmetrisch zu der Ebene liegen, welche den gebildeten Keilwinkel halbt. Aus diesem Grunde wird die Diagonalebene c auch die Symmetrieebene der vierkantigen Ecke genannt.

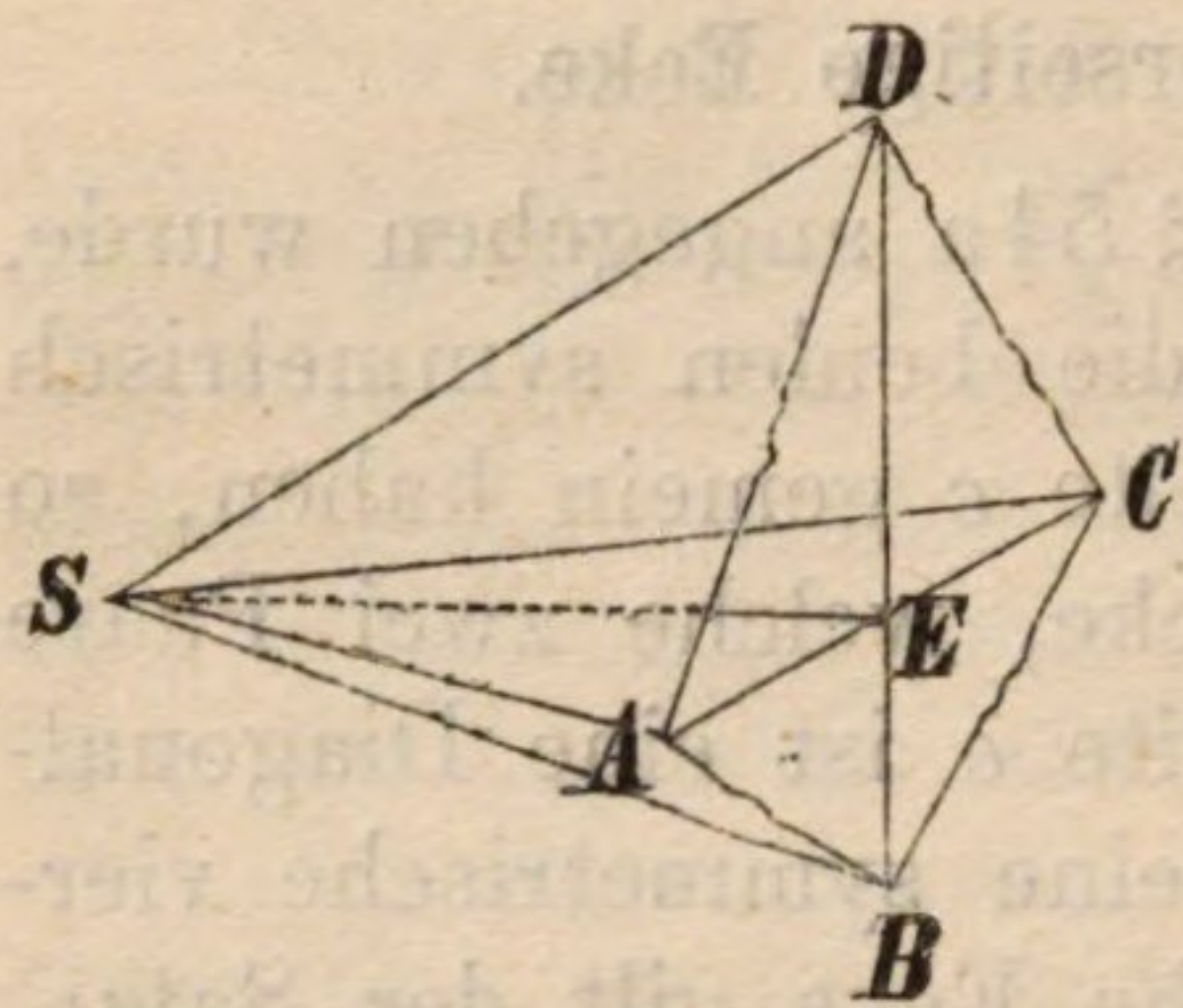
Beweis. 1) folgt aus der Congruenz der beiden dreiseitigen Ecken. 2) und 3) folgen nach dem Satze § 55a aus 1), wenn man bedenkt, dass die zweite Diagonalebene mit den Seiten der vierseitigen Ecke zwei gleichschenklige dreikantige Ecken bildet, deren gemeinsame Grundseite diese Diagonalebene ist.

b) Jede vierkantige Ecke, welche zwei Paare gleicher Nachbarseiten hat, wird durch eine der Diagonalebenen in zwei symmetrisch gleiche Ecken getheilt (ist eine symmetrische vierseitige Ecke).

Die genannte Diagonalebene ist diejenige, welche durch die den gleichen Seiten gemeinsamen Kanten gelegt ist. Dass die beiden dreikantigen Ecken symmetrisch gleich sind, folgt aus der Gleichheit der drei Seiten (§ 54).

c) Jede vierkantige Ecke, welche zwei Nachbarseiten und die anliegenden Gegenwinkel gleich hat, ist symmetrisch.

Fig. 53.



Beweis. Wenn die Seiten ASB und CSB gleich sind, so sind die Winkel an der Grundseite ASC der Ecke $S(ABC)$ auch gleich. Sind nun ausserdem die Keilwinkel der vierkantigen Ecke an den Kanten SA und SB gleich, so folgt durch Subtraction oder Addition zweier Gleichungen, dass die dreiseitige Ecke $S(ACD)$ an der Grundseite ASC zwei gleiche Winkel hat und deshalb gleichschenkelig ist. Die Behauptung ergibt sich demnach aus b).

§ 57. Construction der Ecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Zweiter Congruenzsatz.

a) Aufgabe. Zwei Seiten einer dreiseitigen Ecke und der eingeschlossene Winkel seien gegeben. Man soll die übrigen Stücke durch Construction finden.

Auflösung. Mit Kenntniss der Seiten a, c und des eingeschlossenen Winkels β kann man die Fig. 46 vollständig construiren. Man nehme zu diesem Zwecke den Punkt C_1 in beliebiger Entfernung von S an und construire das rechtwinklige Dreieck SC_1B aus der Hypotenuse und dem Winkel a . Nun kann auch das Dreieck BC_3D aus den bekannten Stücken β und $BC_3 = BC_1$ gefunden werden. Von dem nun bekannten Punkt D aus findet man A durch Fällen einer Senkrechten und con-

struirt das Dreieck ADC_4 aus den bekannten Catheten AD und $DC_4 = DC_3$. Dreieck SAC_2 endlich bestimmt sich ebenfalls aus den bekannten Catheten SA und $AC_2 = AC_4$. Damit sind die Stücke α und b der Ecke gefunden. Zur Bestimmung des Winkels γ verfähre man ebenfalls nach § 50.

b) Wenn zwei dreikantige Ecken zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich haben, so sind sie congruent oder symmetrisch gleich.

Der Beweis wird genau ebenso aus der Construction § 57a gefunden, wie der Beweis von § 54a aus der Construction § 50a.

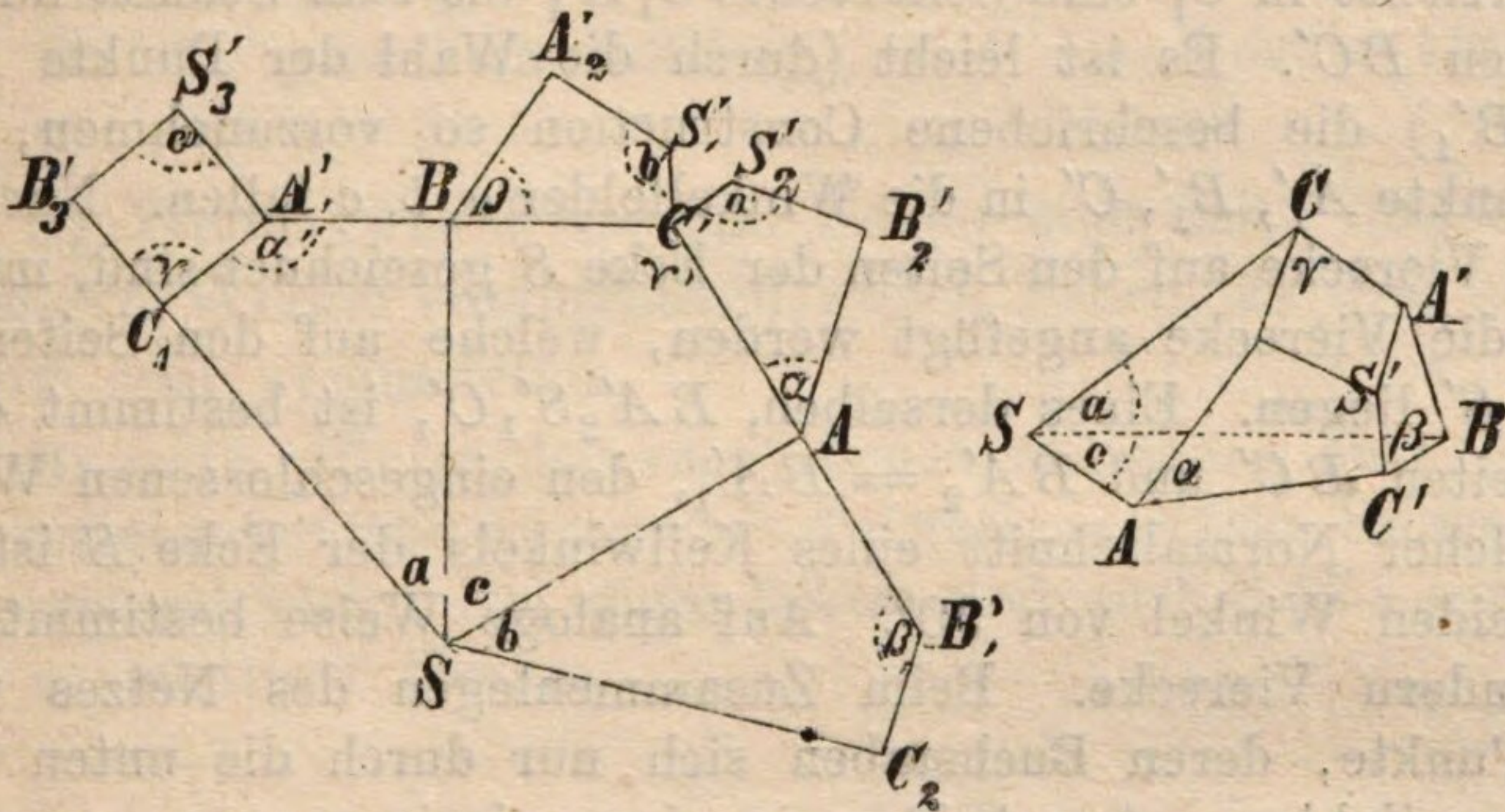
§ 58. Die Polarecke.

a) Zu jeder dreikantigen Ecke S lässt sich eine andere dreikantige Ecke S' construiren, deren Seiten auf den Kanten von S senkrecht stehen (Polarecke von S). Die ursprüngliche Ecke erscheint als Polarecke von S' . Die Seiten von S sind zu den Winkeln von S' supplementär und umgekehrt.

Beweis. Wenn man durch die Punkte A und B (Fig. 55) Ebenen senkrecht auf die Kanten SA und SB legt, so erhält

Fig. 54.

Fig. 55.



man die Normalschnitte α und β zweier Winkel von S . Die Schnittlinie $C'S'$ der beiden Ebenen steht nun senkrecht auf der Seite c , weil sie zu beiden Kanten SA und SB senkrecht ist. Der Winkel $AC'B$, welcher mit γ' bezeichnet ist, stellt daher den Normalschnitt des an der Kante $S'C'$ liegenden Keilwinkels vor. Da das Viereck $SAC'B$ bei A und B zwei rechte Winkel enthält, so hat man

$$c + \gamma' = 180^\circ.$$

Legt man nun noch eine dritte Ebene durch einen Punkt der Kante SC senkrecht auf die letztere, so wird der Normalschnitt γ des dritten Winkels der Ecke S sichtbar und es bildet sich die Polarecke S' . Der Winkel γ' erscheint nun als Normalschnitt eines Winkels dieser Ecke. Dasselbe gilt aber für die Winkel α' und β' der Polarecke und man hat auch für diese Normalschnitte die analogen Gleichungen

$$a + \alpha' = 180^\circ; \quad b + \beta' = 180^\circ.$$

Die Ecke S erscheint nun als Polarecke von S' , denn sowie bewiesen wurde, dass die Seite c auf der Kante $S'C'$ von S' senkrecht steht, so lässt sich dasselbe von a und $S'A'$, von b und SB' zeigen. Daraus folgt unmittelbar, dass auch die Gleichungen

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ; \quad \beta + \beta' = 180^\circ; \quad \gamma + \gamma' = 180^\circ$$

Geltung haben.

b) Aufgabe. Das Netz der Figur 54 zu entwerfen.

Auflösung. (Fig. 54.) a, b, c seien die in einer Ebene ausgebreiteten Seiten der Ecke. Man ziehe senkrecht zu den Richtungen SA und SB zwei Geraden AC' und BC' , welche sich in C' schneiden. Von einem Punkte B'_1 der einen Normalen falle man B'_1C_2 senkrecht auf SB_2 . Ferner mache man $SC_1 = SC_2$ und errichte in C_1 eine Senkrechte $C_1A'_1$ bis zum Schnitt mit der Geraden BC' . Es ist leicht (durch die Wahl der Punkte B, A und B'_1) die beschriebene Construction so vorzunehmen, dass die Punkte A'_1, B'_1, C' in die Winkelfelder a, b, c fallen. Nachdem so die Vierecke auf den Seiten der Ecke S gezeichnet sind, müssen noch die Vierecke angefügt werden, welche auf den Seiten der Ecke S' liegen. Eines derselben, $BA'_2S'_1C'$, ist bestimmt durch die Seiten BC' und $BA'_2 = BA'_1$, den eingeschlossenen Winkel β , welcher Normalschnitt eines Keilwinkels der Ecke S ist und die beiden Winkel von 90° . Auf analoge Weise bestimmt man die andern Vierecke. Beim Zusammenlegen des Netzes fallen alle Punkte, deren Buchstaben sich nur durch die unten angehängten Zahlen unterscheiden, in einen einzigen zusammen.

§ 59. Construction der Ecke aus den Winkeln oder aus einer Seite und den anliegenden Winkeln. Dritter und vierter Congruenzsatz.

a) Aufgabe. Die Winkel einer dreikantigen Ecke seien bekannt; man soll die Seiten derselben durch Construction finden.

Auflösung. Wenn die gegebenen Winkel α, β, γ sind, so betragen die Seiten a', b', c' der zur gesuchten Ecke S gehörigen Polarecke $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta, 180^\circ - \gamma$. Durch die Seiten a', b', c' der Polarecke sind ihre Winkel eindeutig bestimmt und können nach § 50 construirt werden. Dann ergeben sich für die Seiten a, b, c von S nach § 58 die Werthe $180 - \alpha', 180 - \beta', 180 - \gamma'$.

b) Wenn zwei dreikantige Ecken die Winkel entsprechend gleich haben, so sind sie congruent oder symmetrisch gleich.

Beweis. Wenn die Winkel der beiden Ecken entsprechend gleich sind, so müssen, wie aus der vorigen Construction hervorgeht, auch die Seiten entsprechend gleich sein, und die Ecken sind nach § 54 congruent oder symmetrisch.

c) Aufgabe. Eine Seite und die anliegenden Winkel einer dreikantigen Ecke seien gegeben; man soll die übrigen Stücke finden.

Auflösung. Wenn die Seite c und die Winkel α, β gegeben sind, so betragen die Stücke γ', a, b der zugehörigen Polarecke $180^\circ - c, 180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta$. Hierdurch sind aber die übrigen Stücke c', α', β' der Polarecke eindeutig bestimmt und können nach § 57a construirt werden. Hierauf ergeben sich für die gesuchten Stücke γ, a, b die Werthe $180 - c', 180 - \alpha', 180 - \beta'$.

d) Wenn zwei dreiseitige Ecken eine Seite und die anliegenden Winkel entsprechend gleich haben, so sind sie congruent oder symmetrisch.

Beweis. Unter der angegebenen Bedingung sind, wie aus der vorigen Aufgabe folgt, auch die übrigen Stücke beider Ecken entsprechend gleich und diese Ecken sind nach § 57b congruent oder symmetrisch gleich.

§ 60. Trigonometrische Beziehungen.

a) Für die Polarecke gilt die Gleichung (§ 52b)

$$\cos c' = \cos a' \cdot \cos b' + \sin a' \cdot \sin b' \cdot \cos \gamma'.$$

Setzt man hier $c' = 180 - \gamma, a' = 180 - \alpha, b' = 180 - \beta$ und $\gamma' = 180 - c$, so erhält man für die ursprüngliche Ecke die Gleichung

$$-\cos \gamma = (-\cos \alpha)(-\cos \beta) + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot (-\cos c)$$

oder $\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$.

Ebenso beweist man die analogen Gleichungen für $\cos \alpha$ und $\cos \beta$.

§ 61. Uebungen.

1) Nach der Gleichung $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$ in § 52b soll man die Seite c einer dreiseitigen Ecke berechnen, wenn:
 $\alpha) a = 30^\circ, b = 60^\circ, \gamma = 90^\circ.$ $\beta) a = 45^\circ, b = 30^\circ, \gamma = 60^\circ.$ $\gamma) a = 45^\circ, b = 60^\circ, \gamma = 60^\circ.$

2) In welche Gleichung geht die Beziehung in § 52b über, wenn die Ecke bei γ einen rechten Winkel hat?

Antwort. $\cos c = \cos a \cdot \cos b$.

Man vergleiche diese Formel mit dem Pythagoreischen Satze, insofern dieser eine Beziehung der Seiten eines rechtwinkligen ebenen Dreiecks angibt.

3) Nach der Gleichung $\sin a : \sin b = \sin \alpha : \sin \gamma$ in § 52a berechne man den Winkel α , wenn: $\alpha) a = 120^\circ, b = 90^\circ$ und $\beta = 45^\circ.$ $\beta) a = 90^\circ, b = 60^\circ$ und α doppelt so gross als $\beta.$ $\gamma) a = 60^\circ, b = 45^\circ$ und $\beta = 30^\circ.$

Man berücksichtige bei der Beantwortung von 3) und 4) den Satz § 53b.

4) Nach derselben Gleichung a zu berechnen, wenn: $\alpha) b = 20^\circ, \beta = 31^\circ, \alpha = 70^\circ.$ $\beta) b = 35^\circ, \beta = 25^\circ, \alpha = 36^\circ.$ $\gamma) b = 53^\circ, \beta = 42^\circ, \alpha = 80^\circ.$

5) In welche Gleichung geht die Proportion in § 52a über, wenn α ein rechter Winkel ist?

Antwort. $\sin b = \sin a \cdot \sin \beta$ oder $\sin \beta = \sin b : \sin a$.

Man vergleiche diese Formel mit der Definition des Sinus eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck, insofern auch dieser Sinus durch die dem Winkel gegenüberliegende Seite und die Gegenseite des rechten Winkels ausgedrückt ist.

6) Man setze in der Gleichung $\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$ die Seiten a und b einander gleich, wodurch man die Ecke als gleichschenkelig voraussetzt. Dann erhält man $\cos c = \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos \gamma$.

7) Die Gleichung $\cos c = \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos \gamma$ kann man folgenderweise umformen:

$$\cos c = 1 - \sin^2 a (1 - \cos \gamma)$$

$$1 - \cos c = \sin^2 a (1 - \cos \gamma)$$

$$2 \cdot \sin^2 \frac{c}{2} = \sin^2 a \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$\sin \frac{c}{2} = \sin a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Um die letzte Gleichung aus der vorletzten zu folgern, muss man bedenken, dass diese Formeln nur für solche körperliche Ecken gelten, deren Seiten und Winkel 180° nicht überschreiten.

8) Wie verändert sich die Endgleichung in 7), wenn $a = c$ gesetzt wird, also die Ecke gleichseitig ist?

Antwort. $\sin \frac{c}{2} = \sin c \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$

9) Die Gleichung $\sin \frac{c}{2} = \sin c \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$ kann man auch schreiben: $\sin \frac{c}{2} = 2 \cdot \sin \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$ oder: $1 = 2 \cdot \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$

10) Aus der letzten Gleichung in 9) erhält man $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2 \cdot \cos \frac{c}{2}}$

zur Berechnung der Keilwinkel einer gleichseitigen Ecke.

11) Wie gross ist die Grundseite einer gleichschenkligen Ecke, wenn die gleichen Seiten 30° betragen und der Keilwinkel an der Scheitellkante 60° hat?

12) Man berechne nach der Gleichung $\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{c}{2} : \sin \alpha$ (aus 7):

- $\alpha)$ den Winkel an der Kante ZF im Pyramidenwürfel der Fig. 5 in Tab. I aus der Ecke $F(EZG)$;
- $\beta)$ den Winkel an der Kante des regelmässigen Ikosaeder der Fig. 10 in Tab. I aus der Ecke $J(GRP)$.

Andeutung. $\alpha)$ Man nehme $\sin \alpha = ZS : ZF$. $\beta)$ Die Seite c , welche dem gesuchten Winkel gegenüberliegt, beträgt 108° (vergl. § 70, 10). $\alpha = 60^\circ$.

13) Nach der Formel für $\sin \frac{\gamma}{2}$ soll man berechnen:

- $\alpha)$ die Winkel an der Ecke $M(ABC)$ im Rhombendodekaeder der Fig. 7 in Tab. I;
- $\beta)$ die Winkel an der Ecke $M(ABC)$ im Pyramidenoctaeder der Fig. 6 in Tab. I;
- $\gamma)$ die Winkel an der Ecke $F(QUN)$ im regelmässigen Dodekaeder der Fig. 11 in Tab. I.

Andeutung. $\alpha)$ Den Werth von $\cos \frac{c}{2}$ entnehme man aus Fig. 7 als $GM : AM$. $\beta)$ Den Werth von $\cos \frac{c}{2}$ entnehme man aus Fig. 6 als $GM : AM$. $\gamma)$ $c = 108^\circ$.

14) In welche Gleichung geht die Beziehung $\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c$ des § 60a über, wenn $\beta = \alpha$ gesetzt wird?

Antwort. $\cos \frac{\gamma}{2} = \sin \alpha \cdot \cos \frac{c}{2}.$

15) Eine gerade Pyramide mit regelmässiger Basis ist gegeben. Man soll den Keilwinkel an der Seitenkante berechnen:

- $\alpha)$ wenn die Winkel an der Grundlinie der Seitenflächen 60° betragen und die Grundfläche ein Quadrat ist;

β) wenn die Winkel an der Grundlinie der Seitenflächen 70° betragen und die Grundfläche ein regelmässiges Sechseck ist.

16) In welche Gleichung geht die Beziehung in 14) über, wenn alle drei Winkel der Ecke gleich sind und man daher $\alpha = \gamma$ setzen kann?

Antwort. Man erhält $1 = 2 \cdot \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$, wie in 9). Die Gleichung $\cos \frac{c}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}$ dient, um die Seiten einer Ecke zu be-

rechnen, welche gleiche Keilwinkel von gegebener Grösse hat.

17) Wie gross sind die Seiten einer dreiseitigen Ecke, deren Winkel sämtlich α) 30° betragen; β) 60° betragen; γ) 120° betragen?

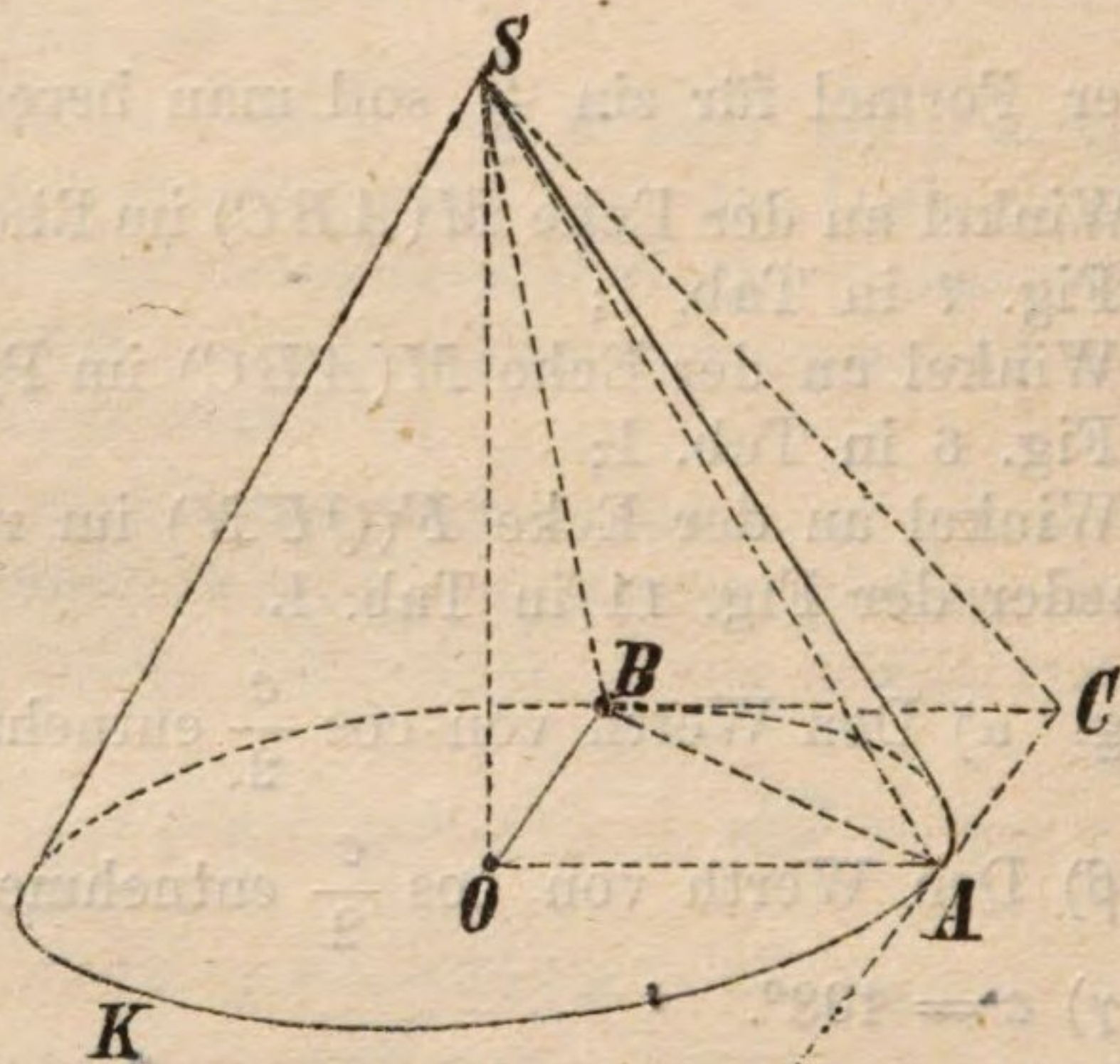
IX. Abschnitt.

Kegel, Kugel und regelmässige Ecken.

62. Der Rotationskegel.

a) Alle Strahlen eines Bündels S , welche mit dem Strahle SO desselben gleiche Winkel	α) Alle Ebenen ε eines Bündels S , welche mit einem Strahle SO desselben gleiche
---	--

Fig. 56.



bilden, sind Kanten eines Rotationskegels, dessen Axe der Strahl SO ist.

Durch jede Kante SA geht eine einzige Ebene, welche keine weitere Kante des Kegels

Neigungswinkel bilden, sind Tangentenebenen eines Rotationskegels, dessen Axe der Strahl SO ist.

Die Berührungskante jeder Tangentenebene erscheint als

enthält. Dieselbe heisst Tangentenebene des Kegels und steht senkrecht auf dem durch die Berührungskante SA gelegten Axenschnitt.

Normalprojection der Axe auf die Ebene. Die Halbamplitude ist der Neigungswinkel des Kegels selbst.

Die dualen Beziehungen zwischen Kanten und Tangentenebenen sprechen wir folgendermassen aus:

Durch jede Kante geht nur eine Ebene, welche keine weitere Kegelkante enthält, nämlich die Tangentenebene. Jede andere durch die Kante gelegte Ebene enthält noch eine zweite Kegelkante. Die beiden Kanten werden als Centralschnitt des Kegels bezeichnet.

Auf jeder Tangentenebene liegt nur ein Strahl des Bündels, durch welchen keine weitere Tangentenebene gelegt werden kann, nämlich die Berührungskante. Jeder andere durch S gehende Strahl der Tangentenebene führt noch auf eine zweite Ebene dieser Art.

Wenn die Ebene SAC durch die Kante SA senkrecht zu dem Axenschnitt SAO gelegt ist, so stellt der Winkel ASO den Neigungswinkel der Axe gegen diese Ebene vor. Jeder andere Strahl SC der Ebene bildet daher mit SO einen Winkel, der grösser als ASO ist. SC liegt somit nicht auf dem Kegel. Um zu beweisen, dass auf jeder andern durch SA gelegten Ebene noch eine zweite Kegelkante liegt, verfährt man folgendermassen:

Man denke sich durch SO Ebenen gelegt, welche senkrecht auf den Ebenen ε stehen und daher die Neigungswinkel enthalten, von welchen angenommen ist, dass sie von derselben Grösse seien. Die auf den Ebenen ε liegenden Schenkel dieser Neigungswinkel sind also nach a) Kanten eines Rotationskegels. Die Ebenen ε sind die Tangentenebenen desselben, weil sie durch die Kanten des Kegels gehen und senkrecht auf den zugehörigen Axenschnitten sind. Um zu beweisen, dass durch jeden von SA verschiedenen Strahl der Tangentenebene SAC noch eine weitere Tangentenebene geht, verfährt man folgendermassen:

Ein Normalschnitt zur Axe schneidet den Kegel in einem Kreise und die Tangentenebene in einer Geraden AC , die mit dem Kreise nur den auf der Berührungskante SA liegenden Kreispunkt A gemein haben kann, also eine Tangente des Kreises ist. Legt man nun durch die Kante SA eine weitere Ebene, so wird dieselbe den Kreis K

Eine zur Axe SO normale Ebene trifft den Kegel in einem Kreise und die Ebenen ε in den Tangenten desselben. Jeder

in einer durch A gehenden Geraden schneiden, die den Kreis in einem zweiten Punkte B trifft. Der Strahl SB ist dann die zweite Kegelkante, welche sich auf der fraglichen Ebene befindet. Zwei Kegelkanten schliessen den grössten Winkel ein (Amplitude des Kegels), wenn ihre Ebene die Axe enthält. Der Winkel der Axe mit einer Kante ist halb so gross als die Amplitude (Halbamplitude).

Strahl SC des Bündels, welcher auf einer Ebene ε liegt und nicht mit der Berührungskante SA zusammenfällt, trifft die Kreistangente des Punktes A in dem von A verschiedenen Punkt C . Die zweite Tangente BC , welche man von C an den Kreis legen kann, bestimmt die zweite Tangentenebene des Kegels, welche durch SC geht.

b) Zwei Kanten des Rotationskegels, die Schnittlinie der zugehörigen Berührungsebenen und die Kegelaxe bestimmen eine symmetrische vierkantige Ecke.

Beweis. In der Ecke $S(ACBO)$ sind die gleichen Nachbarseiten OSA und OSB gleich und die Winkel an den Kanten SA und SB sind als rechte Keilwinkel ebenfalls gleich. Die Behauptung folgt also aus § 56.

c) Mit Berücksichtigung der Eigenschaften einer symmetrischen vierkantigen Ecke (§ 56) ergibt sich sofort eine Reihe von Sätzen, zu welchen die folgenden gehören:

1) Diejenige Ebene, welche einen Centralschnitt des Kegels senkrecht halbt, geht durch die Axe des Kegels und die Schnittlinie der Ebenen, welche den Kegel in den Schenkeln des Centralschnitts berühren. Der Winkel dieser Tangentenebenen wird durch jene Ebene halbt.

2) Diejenige Ebene, welche den Winkel zweier Berührungsebenen halbt, halbt auch den durch die beiden Berührungskanten gebildeten Centralschnitt senkrecht und enthält die Axe des Kegels.

§ 63. Geometrische Oerter.

a) Der geometrische Ort für die Axen aller Rotationskegel, welche die Kanten SB und SC enthalten, ist diejenige Ebene, welche den Winkel BSC senkrecht halbt.

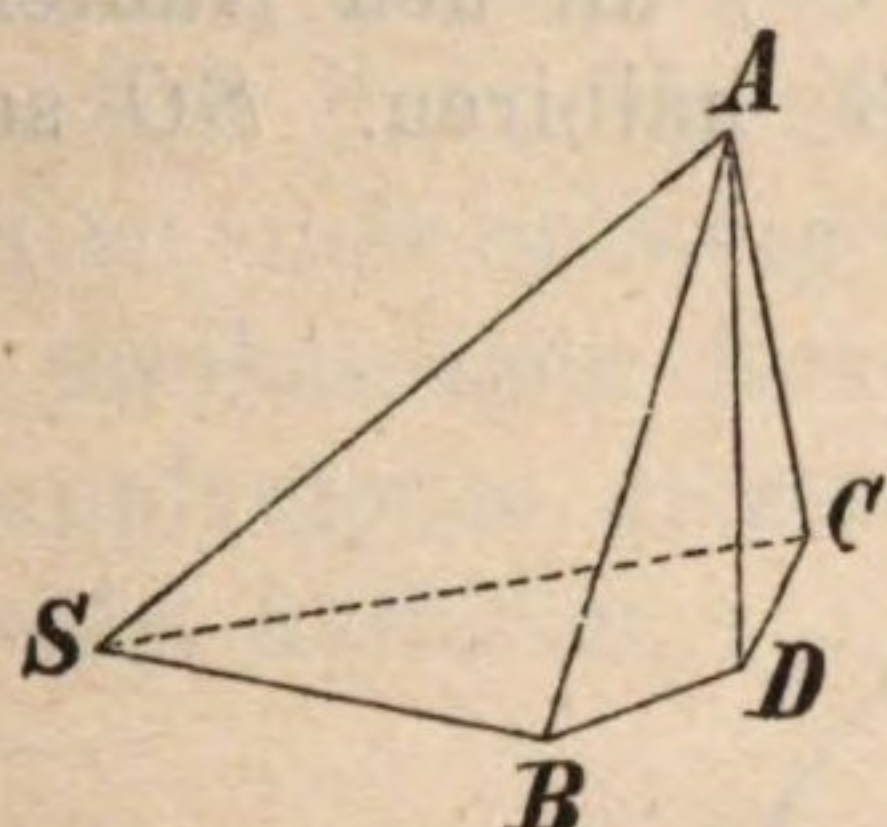
Wenn ein Rotationskegel die Kanten SB und SC (Fig. 57) ent-

α) Der geometrische Ort für die Axen aller Rotationskegel, welche die Seiten eines Keilwinkels berühren, ist die Ebene, welche den Winkel halbt.

Wenn ein Rotationskegel die Seiten β und γ eines Keilwinkels

hält, so ist BSC ein Centralschnitt des Kegels und die Axe SA liegt nach § 62c, 1) auf der Ebene DSA , welche BSC senkrecht halbirt. Wird dagegen SA als

Fig. 57.



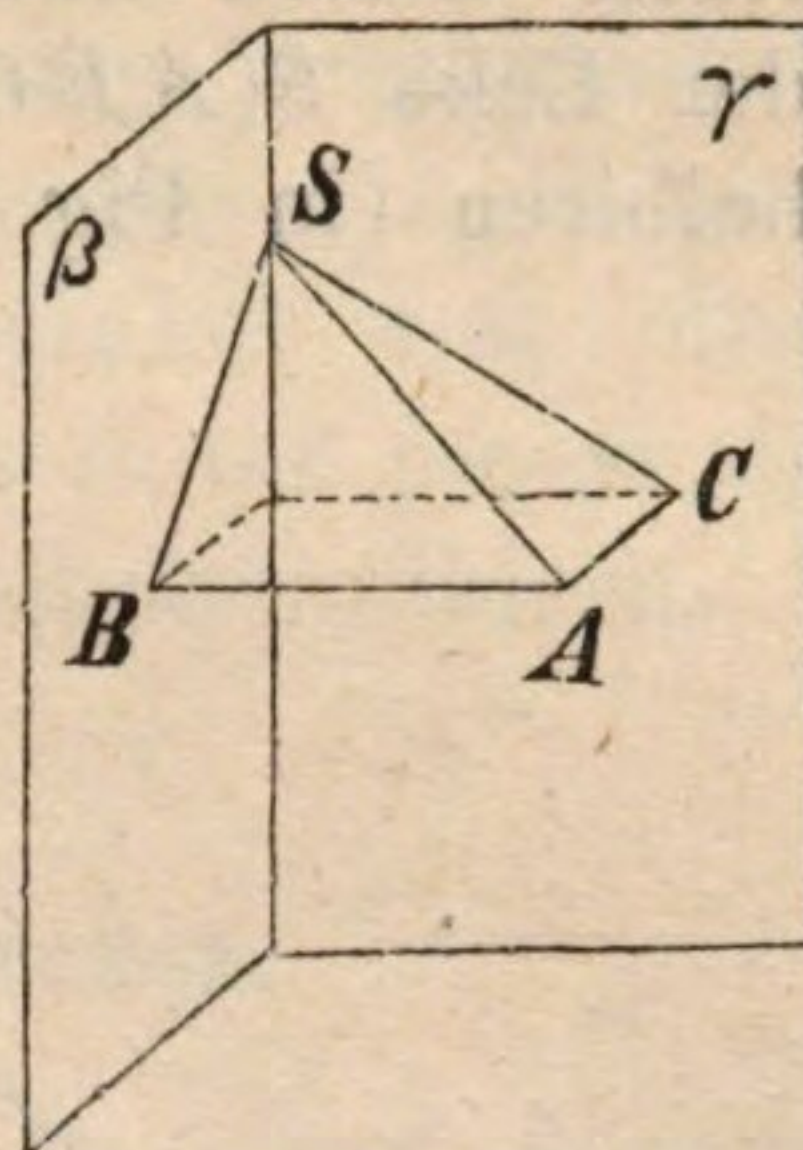
ein durch S gezogener Strahl dieser Ebene angenommen, so sind die dreikantigen Ecken $S(ADB)$ und $S(ADC)$ symmetrisch gleich, weil sie die rechten Winkel an der Kante SD und die einschliessenden Seiten entsprechend gleich haben. Daraus folgt die Gleichheit von BSA und CSA . Ein Kegel, welcher SA zur Axe und ASB zur Halbamplitude hat, wird daher die Kanten SB und SC enthalten.

b) Frägt man nach den Axen aller Rotationskegel, für welche die convergenten Geraden SA und SB Träger zweier Kanten sind, so besteht der geometrische Ort aus den beiden Ebenen, welche die von diesen Geraden gebildeten Winkel senkrecht halbiren.

c) Es gibt nur einen Rotationskegel, welcher die Kanten

(Fig. 58) berührt, so liegt die Axe des Kegels nach § 62c, 2) auf der Ebene, welche den Winkel der Berührungsebenen β und γ halbirt. Wird dagegen SA als

Fig. 58.



ein beliebiger Strahl der Halbierungsebene angenommen, so hat der Punkt A dieser Geraden von β in γ gleiche Abstände AB und AC . Daraus ergibt sich die Congruenz der Dreiecke ASB und ASC , aus welcher die Gleichheit der Neigungswinkel ASB und ASC geschlossen wird. Ein Rotationskegel, welcher SA zur Axe und ASB zur Halbamplitude hat, wird also beide Ebenen α und β berühren.

β) Frägt man nach den Axen aller Rotationskegel, welche zwei convergente Ebenen berühren, so besteht der geometrische Ort aus den beiden Ebenen, welche die entstandenen Keilwinkel halbiren.

γ) Es gibt nur einen Rotationskegel, welcher die Seiten

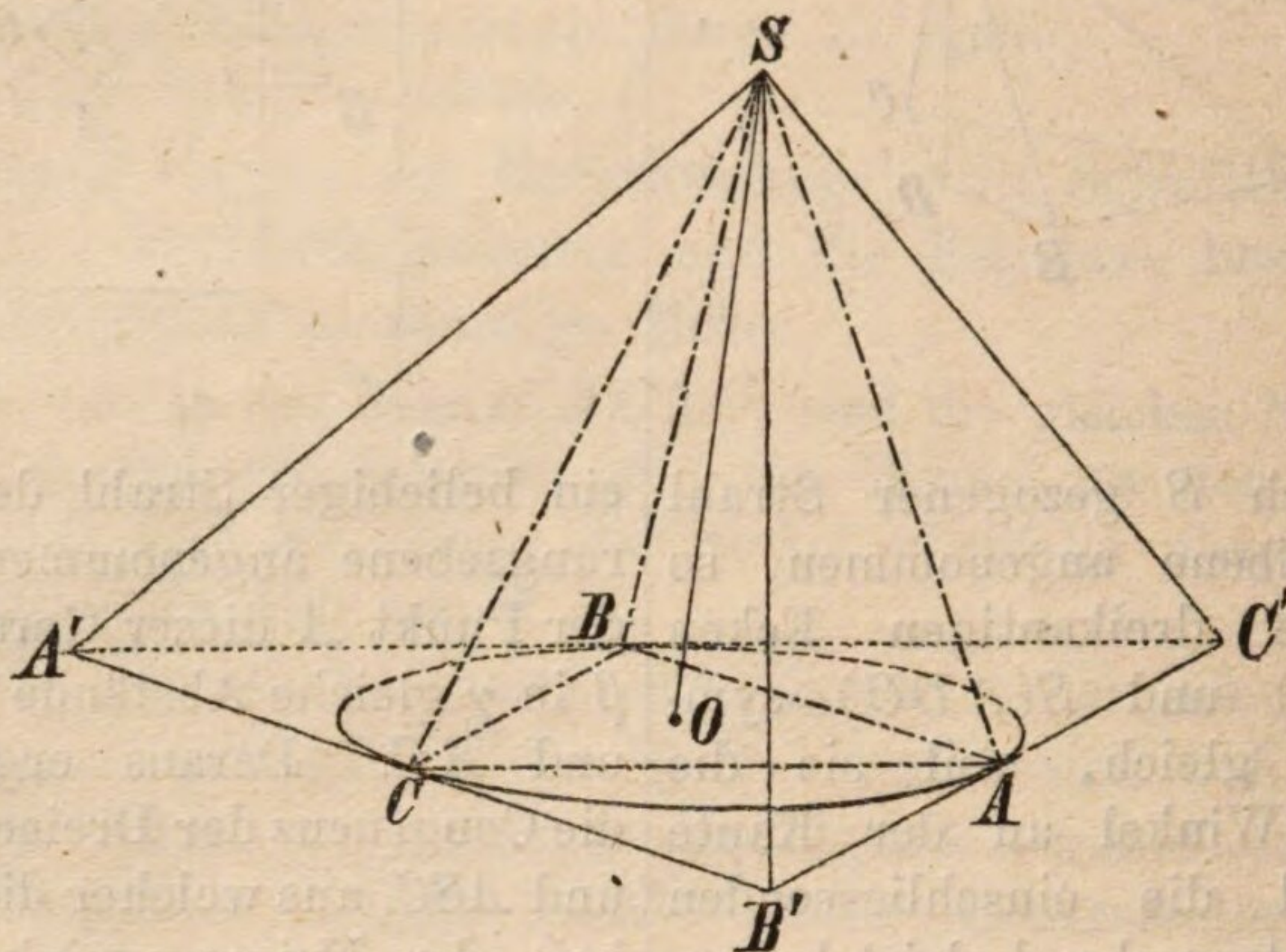
einer dreikantigen Ecke enthält; in seiner Axe schneiden sich die drei Ebenen, welche die Seiten der Ecke senkrecht halbiren.

Man lege die Ebenen, welche die beiden Seiten ASB und BSC der Ecke $S(ABC)$ senkrecht halbiren (in Fig. 59 sind

einer dreikantigen Ecke berührt; in seiner Axe schneiden sich die Ebenen, welche die Winkel der Ecke halbiren.

Man lege die beiden Ebenen, welche die Winkel der Ecke $S(A'B'C')$ an den Kanten SA' und SB' halbiren. SO sei ihre

Fig. 59.



diese Ebenen nicht gezeichnet). SO sei ihre Schnittlinie. Weil SO auf der ersten Ebene liegt, so ist $ASO = BSO$; weil SO auf der zweiten Ebene gelegen ist, hat man $BSO = CSO$. Der Strahl SO bildet also mit den Kanten der Ecke gleiche Winkel und ist deshalb Axe eines Rotationskegels, welcher diese Kanten enthält. Diejenige Ebene, welche die Seite CSA der Ecke senkrecht halbirt, muss nach a) auch durch dieselbe Axe gehen.

Schnittlinie. Weil SO auf der ersten Ebene liegt, so sind die Neigungswinkel von SO gegen die Seiten $A'SB'$ und $A'SC'$ gleich; weil SO auf der zweiten Ebene gelegen ist, so müssen auch die Neigungswinkel von SO gegen $A'SB'$ und $B'SC'$ gleich sein. Da nun alle drei Neigungswinkel gleich sind, so müssen die Seiten der Ecke von einem Kegel berührt werden, welcher SO zur Axe hat. Die Halbierungsebene des dritten Winkels an der Kante SC' muss nach a) auch durch diese Axe gehen.

d) Drei Geraden, welche durch einen Punkt S gehen,

δ) Drei Ebenen, welche durch einen Punkt S gehen,

bestimmen vier Ecken und ihre Gegenecken. Ihnen gehören vier Rotationskegel und ihre Gegenkegel zu, welche jene Geraden zu Trägern von Kanten haben. Die Axen dieser Kegel bestimmen eine vollständige vierkantige Ecke, deren Seiten die Seiten einer beliebigen unter jenen dreikantigen Ecken und die Supplemente dieser Seiten senkrecht halbiren.

bestimmen vier Ecken und ihre Gegenecken. Ihnen gehören vier Rotationskegel und ihre Gegenkegel zu, welche jene Ebenen berühren. Die Axen dieser Kegel bestimmen eine vollständige vierkantige Ecke, deren Seiten die Winkel und Aussenwinkel von einer beliebigen unter jenen dreikantigen Ecken halbiren.

§ 64. Regelmässige Ecken.

a) In einer körperlichen Ecke, deren Kanten auf einem Rotationskegel liegen und deren Seiten gleich sind, haben auch alle Winkel dieselbe Grösse.

α) In einer körperlichen Ecke, deren Seiten einen Rotationskegel berühren und deren Winkel gleich sind, haben auch alle Seiten dieselbe Grösse.

Beweis von a) (Fig. 61): Unter den gegebenen Bedingungen sind alle dreikantigen Ecken $SAOB$, $SBOC$, $SCOD$... wegen der Gleichheit aller Seiten congruent. Daher sind auch alle

Fig. 60.

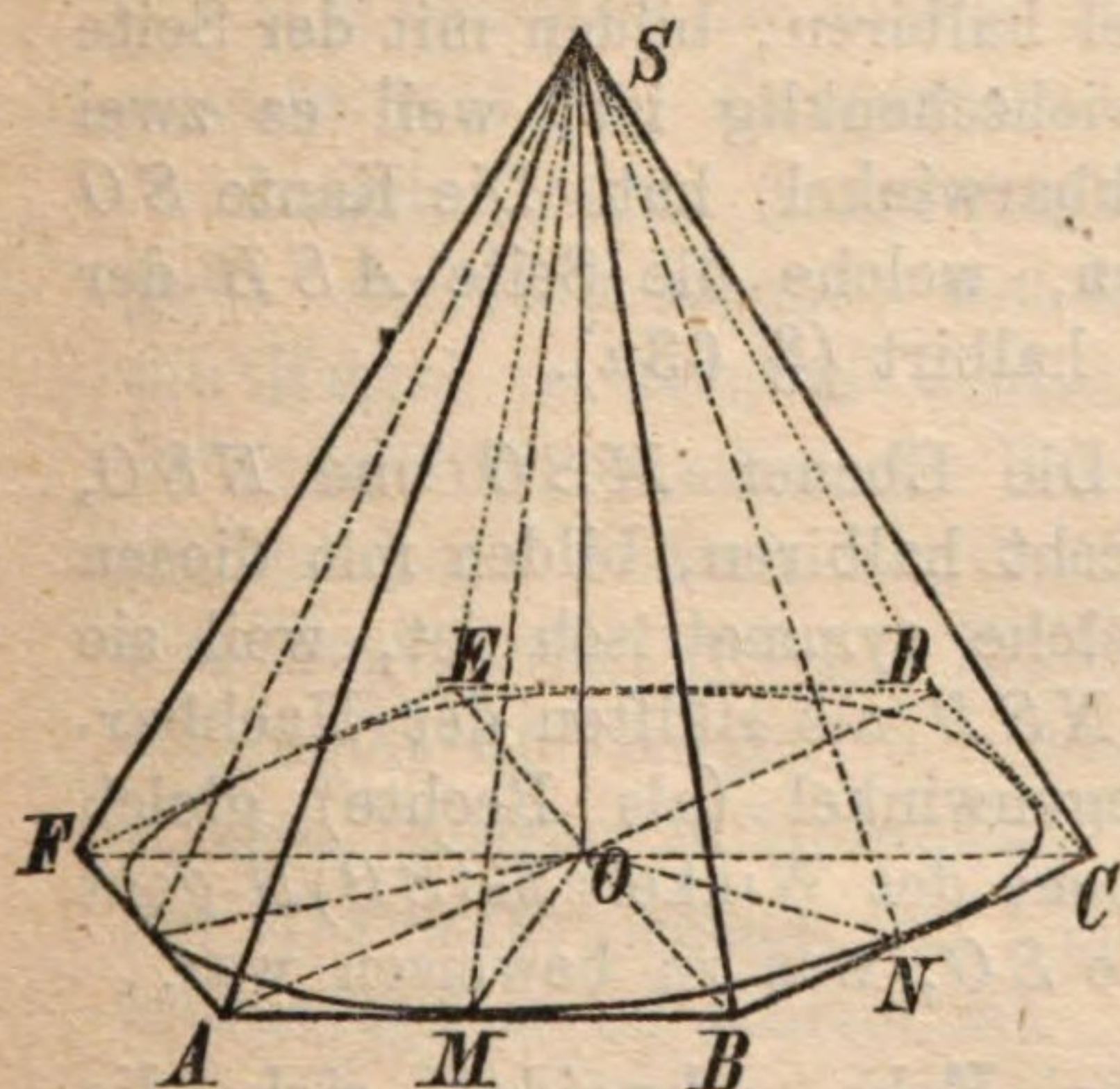
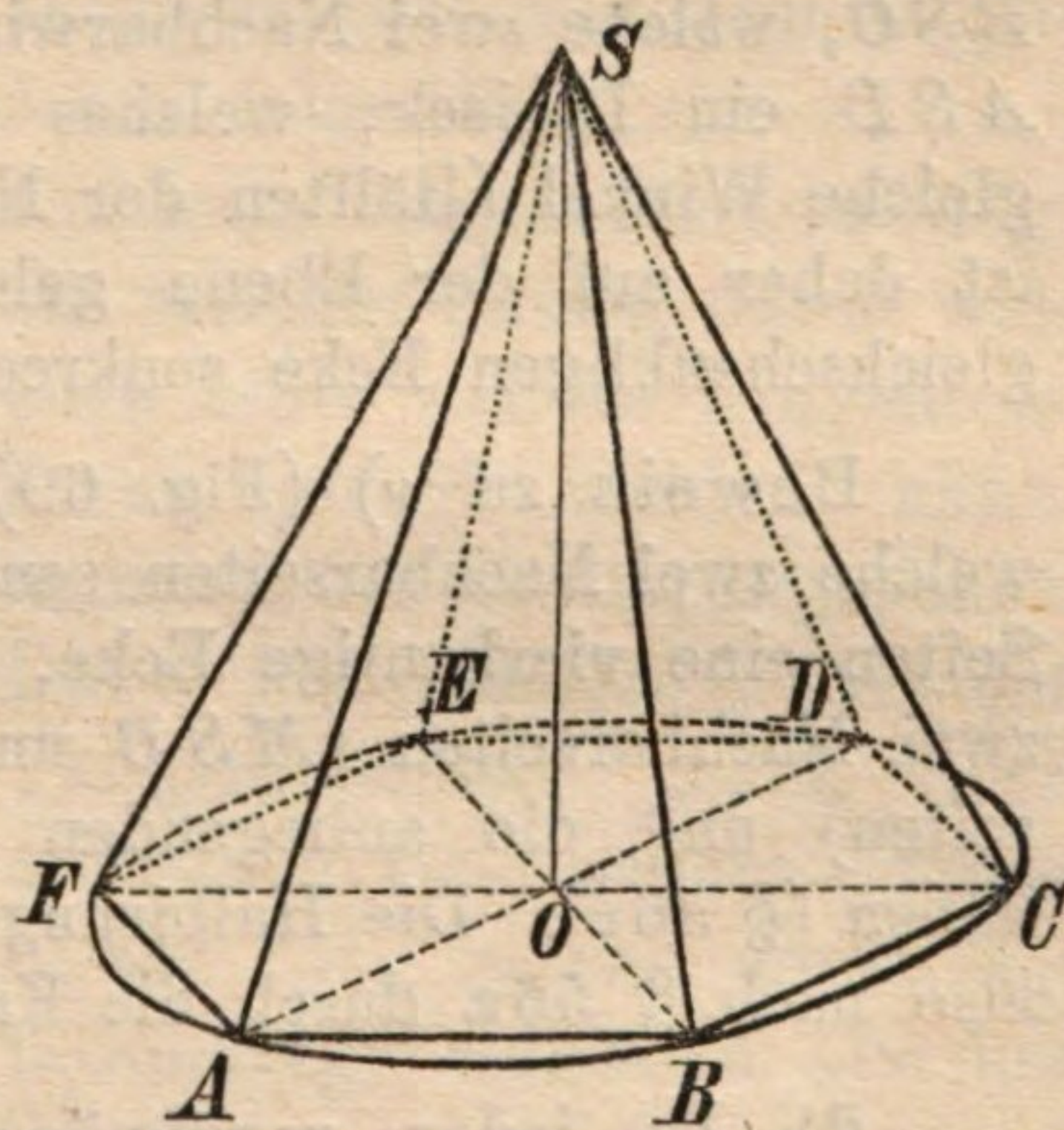


Fig. 61.



Winkel dieser Ecken, welche an den Kanten SA , SB , SC ... liegen, gleich gross. Die Winkel der gegebenen Ecke bestehen aber aus je zweien jener Winkel, womit die Behauptung erwiesen ist.

Beweis von α) (Fig. 60): Diejenigen Ebenen, welche die Winkel der Ecke halbiren, gehen nach § 62c,2 durch die Axe des Kegels. Die dreikantigen Ecken $SAOB$, $SBOC \dots$ haben daher zwei gleiche Winkel (Hälften der Winkel in der gegebenen Ecke) und sind gleichschenkelig. Man lege nun durch die Axe des Kegels Ebenen, welche auf den Seiten der Ecke senkrecht sind und deshalb diese Seiten in den Berührungskanten treffen. Aus § 55a folgt, dass auf einer Seite ASB die beiden Theile ASM und BSM gleich gross sind. Andererseits sieht man, dass die vierkantigen Ecken wie $SMBNO$ symmetrisch sind, denn sie haben zwei Seiten (MSO und NSO) sowie die anliegenden Gegenwinkel (als Rechte) gleich. Daraus folgt $BSM = BSN$. Wenn aber in der gegebenen Ecke die Hälften der Seiten gleich sind, so sind es auch die Ganzen.

b) Eine körperliche Ecke, welche lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel hat, heisst regelmässig.

c) In einer regelmässigen Ecke schneiden sich die Halbierungsebenen zweier Nachbarwinkel auf der Ebene, welche die eingeschlossene Seite senkrecht halbirt.

γ) In einer regelmässigen Ecke schneiden sich die Ebenen, welche zwei Nachbarseiten senkrecht halbiren auf der Halbierungsebene des eingeschlossenen Winkels.

Beweis zu c) (Fig. 61): Die beiden Ebenen ASO und BSO , welche zwei Nachbarwinkel halbiren, bilden mit der Seite ASB ein Dreieck, welches gleichschenkelig ist, weil es zwei gleiche Winkel (Hälften der Nachbarwinkel) hat. Die Kante SO ist daher auf der Ebene gelegen, welche die Seite ASB der gleichschenkligen Ecke senkrecht halbirt (§ 63a).

Beweis zu γ) (Fig. 60): Die Ebenen MSO und NSO , welche zwei Nachbarseiten senkrecht halbiren, bilden mit diesen Seiten eine vierkantige Ecke, welche symmetrisch ist, weil sie zwei Nachbarseiten (MSB und NSB als Hälften der Nachbarseiten) und die anliegenden Gegenwinkel (als Rechte) gleich haben (§ 56c). Die Halbierungsebene des Winkels $M(SB)N$ geht also nach § 56a durch die Kante SO , was zu beweisen war.

d) In jeder regelmässigen Ecke schneiden sich die Halbierungsebenen der Winkel und die Ebenen, welche die Seiten senkrecht halbiren, in einer Geraden, welche mit allen Kanten gleiche Winkel bildet und gegen alle Seiten gleich geneigt ist (Axe der regelmässigen Ecke).

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus c) und γ). Je zwei auf einander folgende Winkel ASO und BSO sind gleich, weil die Ecke $SAOB$ gleichschenkelig ist (§ 53a). Je zwei auf einander folgende Neigungswinkel MSO und NSO sind gleich, weil die vierseitige Ecke $SMONB$ symmetrisch ist.

Zusatz. In und um jede regelmässige Ecke lässt sich ein Rotationskegel legen. Die Axen beider Kegel fallen mit der Axe der Ecke zusammen.

§ 65. Die Kugel; Punkt- und Tangentenebenen.

a) Alle Punkte, welche von einem Punkte C dieselbe Entfernung r haben, liegen auf einer Kugel, welche C zum Centrum und r zum Radius hat. Durch jeden Kugelpunkt A geht eine einzige Ebene α , welche mit der Kugel keinen weiteren Punkt gemein hat; sie steht senkrecht auf dem Radius CA und heisst Berührungsebene.

α) Alle Ebenen, welche von einem Punkte C dieselbe Entfernung r haben, sind Berührungsebenen einer Kugel, welche C zum Centrum und r zum Radius hat. Die Berührungspunkte der Tangentenebenen erscheinen als Normalprojection des Centrums auf dieselben.

Wir drücken die dualen Beziehungen zwischen dem Kugelpunkte und der Tangentenebene auf folgende Weise aus:

Durch jeden Kugelpunkt geht nur eine Ebene, welche die Kugel in keinem weiteren Punkte trifft, nämlich die Tangentenebene. Jede andere durch den Kugelpunkt gelegte Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen Mittelpunkt P die Normalprojection des Centrums auf diese Ebene ist.

Alle Berührungsebenen in den Punkten dieses Kreises umhüllen einen Rotationskegel, dessen Axe durch die Normale CP dargestellt ist.

Auf jeder Tangentenebene liegt ein einziger Punkt, durch welchen keine weitere Tangentenebene gelegt werden kann, nämlich der Berührungspunkt. Durch jeden andern Punkt der Tangentenebene gehen noch unendlich viele andere Ebenen dieser Art, welche einen Rotationskegel einhüllen. Die Axe desselben geht durch das Centrum C . Die Berührungspunkte dieser Tangentenebenen liegen auf einem Parallelkreise des Rotationskegels.

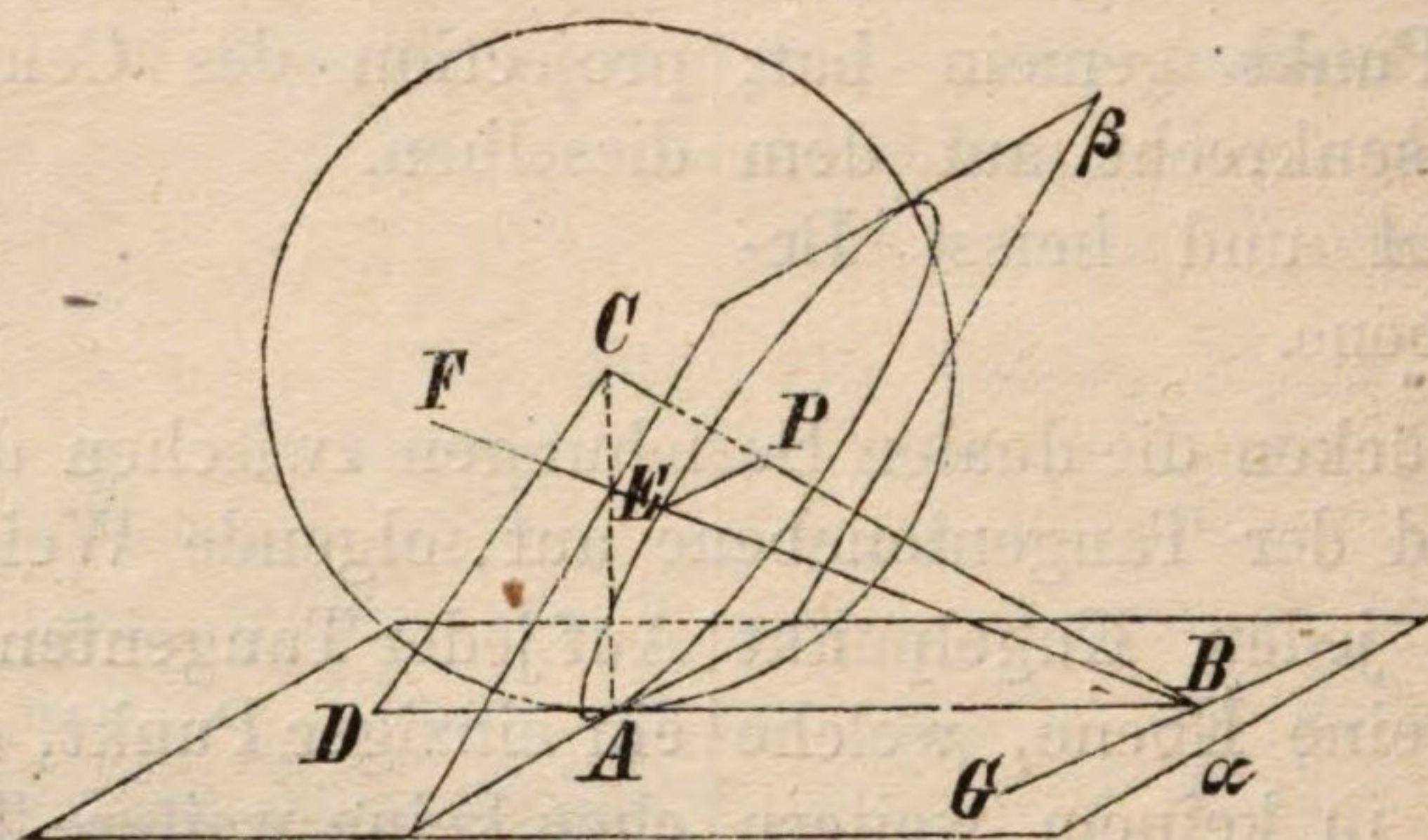
Zusätze. 1) Jede Ebene, welche durch das Centrum der Kugel geht, schneidet die Kugel in einem Kreise, dessen Radius dem Kugelradius gleich ist (Hauptkreis). Die Tangentenebenen in den Punkten eines solchen Kreises umhüllen eine Cylinderfläche.

2) Die Tangentenabschnitte von einem Punkte B bis zu den Berührungspunkten sind gleich gross.

Wenn die Ebene α in A auf CA senkrecht steht, so liegt jeder andere Punkt D derselben ausserhalb der Kugel, weil $CD > CA$. Wenn β eine andere durch A gelegte Ebene ist, so ziehe man CP auf β senkrecht und drehe das Dreieck CPA um CP . PA beschreibt dann die Ebene β und der Punkt A

Wenn die Entfernung CA der Ebene α von C gleich r ist, so liegt A auf einer Kugel, welche das Centrum C und den Radius r hat und ist Tangentenebene an diese Kugel. A ist der Berührungspunkt und erscheint als Projection von C auf α . (Vergl. den Beweis zu a.) Durch den Kreispunkt A lässt sich nach

Fig. 62.



beschreibt einen der Kugel und der Ebene gemeinsamen Kreis mit dem Mittelpunkte P . Verlängert man CP bis zum Schnitt B mit der Tangentenebene α , so sieht man, dass diese letztere, wenn sie an der Drehung um CB theilnimmt, nach und nach die Lagen aller Tangentenebenen einnimmt, welche ihre Berührungspunkte auf dem von A beschriebenen Kreise haben.

dem in a) Gesagten keine weitere Tangentenebene legen. Nimmt man aber irgend einen andern Punkt B von α an und dreht man die mit BC fest verbundene Ebene α um diese Axe, so bleibt α immer Tangentenebene an die Kugel und umhüllt dabei einen Rotationskegel mit der Axe BC . Der Berührungspunkt A beschreibt einen Parallelkreis des Kegels, dessen

Diese Tangentenebenen hüllen einen Rotationskegel ein, dessen Axe die Gerade CB ist (§ 62 a). Ebene somit auf der Axe senkrecht steht.

§ 66. Tangenten der Kugel.

a) Alle Geraden, deren Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel dem Radius gleich ist, berühren die Kugel in einem einzigen Punkte und heissen Tangenten der Kugel.

b) Diejenigen Tangenten, welche durch einen Punkt A der Kugel gehen, bilden ein Strahlenbüschel, dessen Träger die Tangentenebene (Berührungsebene) in A ist.

Auf jedem andern Strahle, welcher durch A geht, befindet sich ein zweiter Kugelpunkt.

c) Wenn eine Ebene β die Kugel schneidet, so umhüllen die in ihr befindlichen Kugeltangenten den Schnittkreis, welchen die Kugel mit der Ebene β gemein hat.

β) Diejenigen Tangenten, welche auf einer Berührungsebene α liegen, bilden einen Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Berührungspunkt von α ist.

Durch jeden andern Strahl der Berührungsebene geht eine zweite Ebene dieser Art.

γ) Wenn ein Punkt B ausserhalb der Kugel liegt, so gehen durch ihn unendlich viele Tangenten, die Kanten eines Rotationskegels, welcher von den durch B gelegten Tangentenebenen umhüllt wird.

Beweise: (Fig. 62) Wenn die Entfernung CA der Geraden AD von C dem Radius gleich ist, so liegt A auf der Kugel und jeder andere Punkt D der Geraden ist von der Kugel ausgeschlossen, weil $CD > CA$. Die Tangente AD liegt nach § 6 b, 3 in der Berührungsebene des Punktes A . Irgend eine durch A gezogene Gerade, welche nicht auf α senkrecht steht, bestimmt mit AD eine Ebene, welche die Kugel in einem Kreise schneidet. AD hat mit der Kugel, also auch mit diesem Kreise nur den Punkt A gemein und muss folglich den Kreis in A berühren. Die Gerade AF dagegen muss den Kreis und daher auch die Kugel zum zweiten Male treffen.

Dass diejenigen Strahlen einer Berührungsebene, welche durch den Berührungspunkt gehen, Tangenten der Kugel sind, folgt aus dem Vorigen.

Ist BG irgend ein anderer Strahl der Berührungsebene α , so ist B das Centrum eines Rotationskegels, der von Tangenten-

ebenen der Kugel umhüllt wird. Durch die Gerade BG gehen nach § 62a zwei dieser Tangentenebenen, deren eine die Ebene α ist. Alle Strahlen, die von B nach den Berührungspunkten der Tangentenebenen gezogen sind, d. h. alle Kanten des Kegels sind nach dem Vorigen Tangenten der Kugel.

§ 67. Geometrische Oerter.

a) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kugeln, welche durch die Punkte A und B gehen, ist diejenige Ebene, welche die Strecke AB senkrecht halbiert.

Mittelpunkte solcher Kugeln sind diejenigen Punkte, welche von A und B gleiche Abstände haben. Die Behauptung folgt also aus § 10a.

b) Alle Kugeln, welche durch drei Punkte A, B, C gehen, haben den durch diese Punkte bestimmten Kreis gemein. Der Ort für ihre Mittelpunkte ist diejenige Gerade, welche im Centrum des Kreises ABC senkrecht auf seinem Träger errichtet ist.

Jede Kugel, welche durch A, B, C geht, hat mit der Ebene ABC den Kreis gemein, welcher durch diese Punkte bestimmt ist (§ 65a). Der Mittelpunkt dieser Kugel liegt nach § 65a senkrecht über dem Centrum P des Kreises ABC . Umgekehrt ist jeder Punkt der in P errichteten Normalen gleich weit von den Punkten A, B, C entfernt (§ 11, 28). Jeder Punkt dieser Senkrechten stellt somit den Mittelpunkt einer Kugel dar, welche durch A, B, C geht.

α) Der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kugeln, welche die Seiten eines Keilwinkels berühren, ist die Halbirungsebene dieses Winkels.

Mittelpunkte solcher Kugeln sind diejenigen Punkte, welche von den Seiten des Winkels gleiche Abstände haben. Die Behauptung folgt also aus § 10b.

β) Alle Kugeln, welche die Seiten a, b, c einer dreikantigen Ecke berühren, haben den Tangentenkegel gemein, welcher dieser Ecke eingeschrieben ist. Der Ort für die Mittelpunkte der Kugeln ist die Axe dieses Kegels.

Jede Kugel, welche die Seiten a, b, c berührt, hat den durch diese Ebenen bestimmten Kegel zum Tangentenkegel § 65 α . Der Mittelpunkt liegt nach § 65 α auf der Axe dieses Kegels.

Umgekehrt ist jeder Punkt dieser Axe von den Seiten der Ecke gleichweit entfernt, weil er auf den Halbirungsebenen der Winkel gelegen ist (§ 63 γ und 10b). Jeder Punkt dieser Axe stellt somit den Mittelpunkt einer Kugel dar, welche a, b, c berührt.

c) Zusatz. Die Träger der Seiten a, b, c bilden acht Ecken. Die Mittelpunkte der Kugeln, welche die drei Ebenen berühren, liegen auf vier Geraden, welche durch den Schnittpunkt der Ebenen gehen und die Axen der eingeschriebenen Kegel enthalten.

d) Es gibt nur eine Kugel, welche durch die Eckpunkte eines Tetraeders geht. In dem Centrum derselben schneiden sich die Ebenen, welche die Kanten des Tetraeders senkrecht halbiren.

A, B, C, D seien die Eckpunkte des Tetraeders. Jeder Punkt der Normalen, welche im Mittelpunkte des Kreises ABC errichtet ist, hat von den Ecken A, B, C gleiche Abstände. Die Mittelsenkrechte der Kante AD schneidet diese Normale in einem Punkte M , welcher von A, B, C, D gleichweit entfernt ist. Auch alle andern Ebenen, welche die Kanten senkrecht halbiren, gehen durch diesen Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel (§ 10 a).

δ) Es gibt nur eine Kugel, welche die Flächen eines Tetraeders berührt. In dem Centrum derselben schneiden sich die Ebenen, welche die Keilwinkel des Tetraeders halbiren.

Die Flächen des Tetraeders seien mit a, b, c, d bezeichnet. Die Flächen a, b, c bestimmen eine dreikantige Ecke und einen eingeschriebenen Kegel; jeder Punkt der Kegelaxe hat von a, b, c gleiche Abstände. Die Halbirungsebene des von a und d gebildeten Keilwinkels schneidet diese Axe in einem Punkte, welcher von den vier Flächen gleichweit entfernt ist. Alle andern Halbirungsebenen der Keilwinkel gehen ebenfalls durch diesen Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel (§ 10 b).

e) Es gibt acht Kugeln, welche die Träger der Flächen a, b, c, d berühren. Eine derselben ist in δ) besprochen. Vier andere liegen in den Räumen, die von dem innern Raum des Tetraeders durch die Flächen a, b, c, d getrennt sind. In ihren Mittelpunkten schneiden sich drei Ebenen, welche die Aussenwinkel an den Kanten einer Tetraederfläche halbiren und drei andere Ebenen, welche die Innenwinkel derjenigen Kanten halbiren, welche durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen. Drei weitere Kugeln gehören den drei Paaren gegenüberliegender Tetraederkanten zu. In den Mittelpunkten derselben schneiden sich die Halbirungsebenen der Innenwinkel an zwei gegenüberliegenden Kanten und die Halbirungsebenen der Aussenwinkel an den übrigen Kanten.

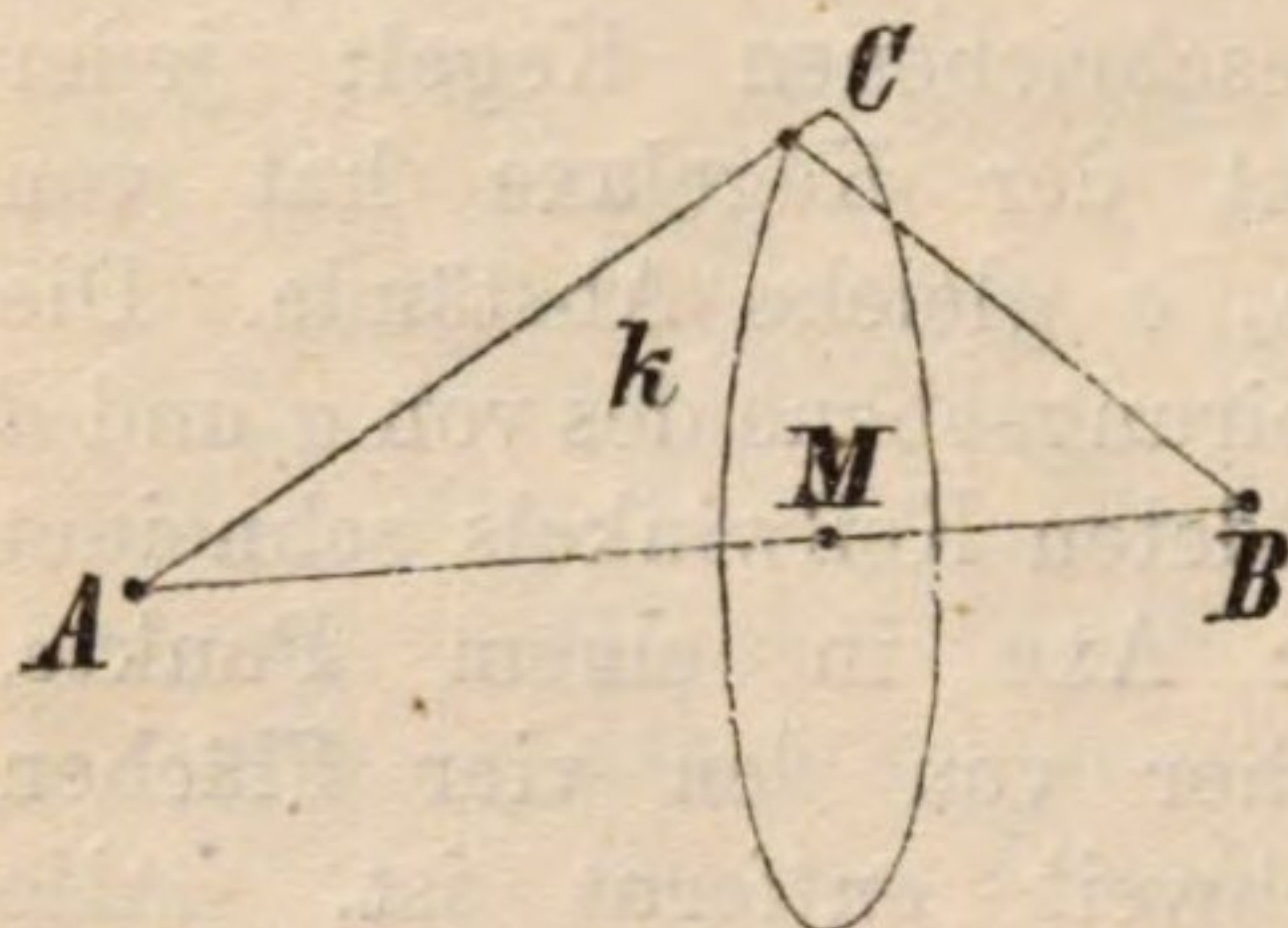
§ 68. Zwei Kugeln.

a) 1) Wenn zwei Kugeln einen Punkt gemein haben, welcher ausserhalb ihrer Centrallinie gelegen ist, so haben sie einen Kreis gemein. Die Centrallinie geht durch den Mittelpunkt dieses Kreises und ist senkrecht zu dem Träger des letzteren.

2) Wenn zwei Kugeln einen Punkt ihrer Centrallinie gemein haben, so berühren sie in diesem Punkte dieselbe Ebene. Die gemeinsame Tangentenebene steht senkrecht auf der Centralen (Berührung von Kugeln). In beiden Fällen können die Kugeln keinen weiteren Punkt gemein haben ohne zusammenzufallen.

Wenn A und B in Fig. 63 die Mittelpunkte der Kugeln sind und der gemeinsame Punkt ausserhalb der Centralen liegt,

Fig. 63.



so drehe man die Figur um die Axe AB . Der Punkt C bleibt alsdann beiden Kugeln gemeinsam und beschreibt einen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf der Centralen hat u. s. w.

Haben aber die Kugeln den Punkt M gemein, so sind AM und BM die Radien der Kugeln und die in M senkrecht auf der Centralen errichtete Ebene ist nach § 65a Tangentenebene für beide Kugeln. Dass die Kugeln im ersten Falle keinen Punkt ausserhalb des Kreises k gemein haben können, ergibt sich aus § 67d. Würde im zweiten Falle ausser dem Punkte M noch ein gemeinsamer Punkt N der Kugeln existiren, so müssten die Mittelpunkte erstens auf der im Berührungspunkt M der Tangentenebene errichteten Normalen AB und zweitens auf der Ebene liegen, welche den Abstand MN senkrecht halbt. Die Mittelpunkte und die Kugeln selbst müssten sich alsdann decken. Von zwei Kugeln, welche nur einen einzigen Punkt M gemein haben, sagt man, dass sie sich berühren.

§ 69. Kegelschnitte.

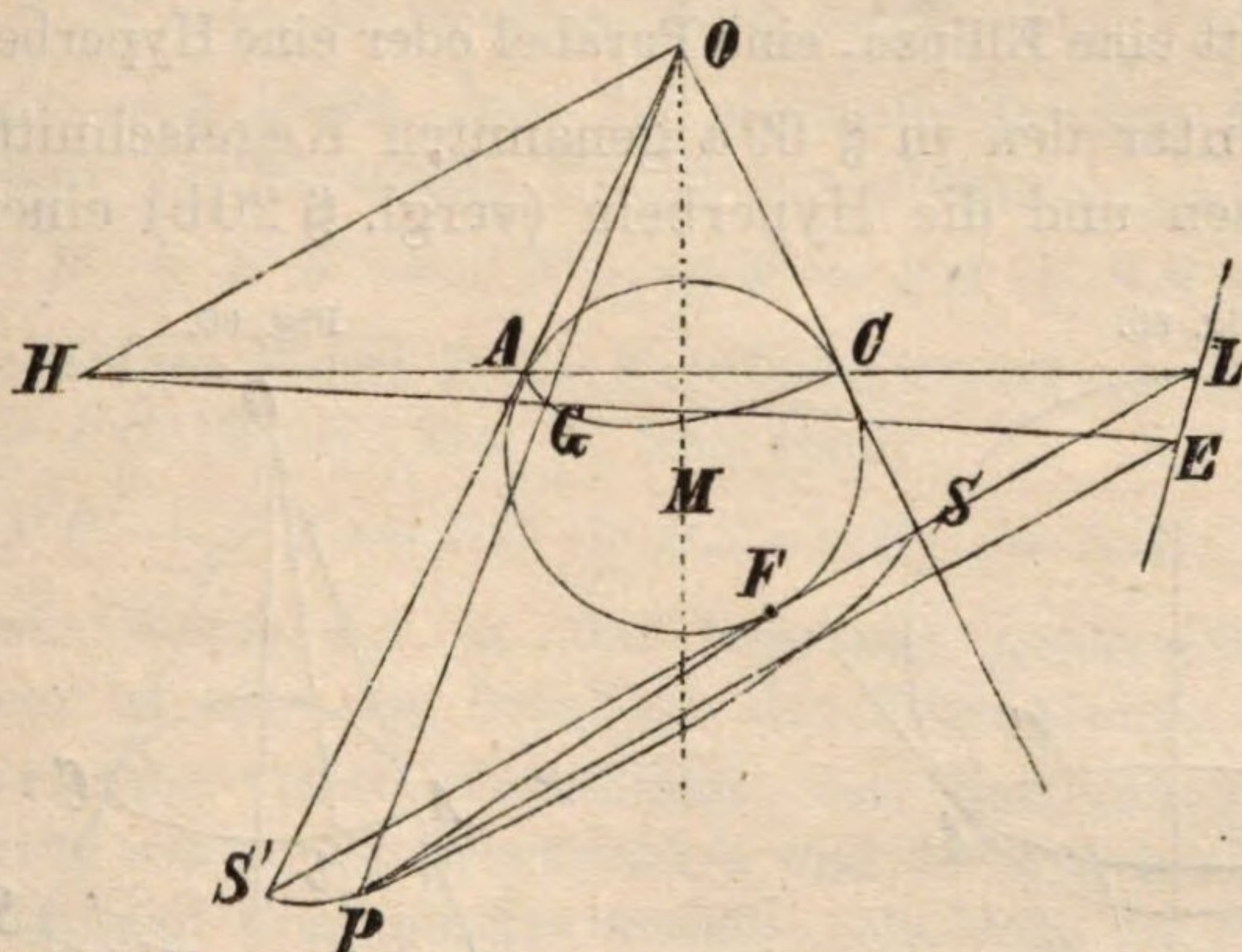
a) Von der Schnittfigur eines Rotationskegels* mit einer Ebene, welche das Centrum O nicht enthält, beweisen wir

* Derselbe Satz gilt auch von den Schnittfiguren anderer Kreiskegel mit Ebenen, die nicht durch das Centrum gehen. Der allgemeine Beweis hiervon führt über das Gebiet dieses Theiles hinaus.

folgenden Satz. Der Abstand der Curvenpunkte von einem festen Punkte F (Brennpunkt) steht zu dem Abstand von einer festen Geraden (Leitlinie) in einem constanten Verhältniss.

Beweis. SOS' (Fig. 64) sei derjenige Axenschnitt des Rotationskegels, welcher auf der Ebene des Kegelschnitts SPS' senkrecht steht. SS' ist nach § 35, 23 und 24 eine Symmetrielinie des Kegelschnitts und heisst die Axe desselben. Man beschreibe in das Dreieck SOS' einen Kreis, der die Seiten in F , A , C berührt. F ist der „Brennpunkt“ des Kegelschnitts. Der Mittelpunkt M des Kreises liegt auf der Kegelaxe, und die Berührungs-

Fig. 64.



sehne AC ist auf dieser Axe senkrecht. Wird der Kreis um die Kegelaxe gedreht, so beschreibt er eine Kugel, welche den Kegel längs des Parallelkreises AGC berührt und von der Ebene des Kegelschnitts SPS' in F berührt wird (die Ebene SPS' steht nach § 11, 21 β auf dem Radius MF senkrecht). Der Kreis AGC kann nun als Originalfigur und der Kegelschnitt SPS' als seine perspectivische Abbildung (Centralprojection) aus dem Punkte O angesehen werden. Original- und Bildebene schneiden sich in dem Strahle LE , welcher auf der Ebene SOS' und daher auch auf der Axe SS' senkrecht steht. LE (die Projectionsaxe) wird die Leitlinie (Directrix) des Kegelschnitts genannt. Man ziehe durch O eine Parallele zu SS' , welche die Originalebene

Vergleiche darüber den zweiten Theil des Leitfadens der ebenen Geometrie, welcher die Lehre von den Kegelschnitten allgemein behandelt.

Kugeln, welche die Ebene des Kegelschnitts in den beiden Brennpunkten berühren. Dass zu jedem Brennpunkte eine Leitlinie gehört, findet sich durch den Beweis von a). Es soll nun zunächst gezeigt werden, dass die Strecken SF und $S'F'$, welche von den Scheitelpunkten der Hauptaxe bis zu den benachbarten Brennpunkten führen, gleich gross sind. Von den doppelten Zeichen beziehen sich die obern auf die Ellipse und Fig. 66, die untern auf die Hyperbel und Fig. 65.

$$SF' = SA; SF = SB \quad (\S 65, \text{Zusatz 2})$$

$$SF' \pm SF = FF' \pm 2SF = SA \pm SB = AB$$

Ebenso: $FF' \pm 2S'F' = CD.$

Da $AB = CD$, so schliesst man hieraus $SF = S'F'$.

Hieraus findet sich leicht, dass die gleichen Strecken AB , GE , CD die Länge der Hauptaxe SS' haben, denn:

$$SS' = SF' \pm F'S' = SF' \pm SF = SA \pm SB = AB$$

für einen beliebigen Punkt P des Kegelschnitts ist nun $PF = PE$ und $PF' = PG$ (§ 65, Zus. 2) und somit

$$PF' \pm PF = PG \pm PE = EG = SS'$$

Der constante Werth der in dem Lehrsatz genannten Summe oder Differenz ist also der Hauptaxe des Kegelschnitts gleich.

Anmerkung. Das Verhältniss der Entfernungen eines Curvenpunktes von einem Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie muss für beide Brennpunkte dasselbe sein, denn die Träger der Parallelkreise AGC und BED (Fig. 65 u. 66) sind parallele Ebenen und das Verhältniss $OA:OH$ (Fig. 64) für den einen Kreis ist deshalb dem analogen Verhältniss für den andern gleich. Daraus ergibt sich aber, mit Benutzung von $FS = F'S'$, dass die Abstände der Leitlinien von den zugehörigen Scheitelpunkten gleich sind.

§ 70. Uebungen.

a) Vermischte Uebungen.

1) Welches ist der geometrische Ort für die Axen der Rotationskegel (Cylinder), welche eine Ebene α in einer Kante a (als Berührungskante) berühren?

2) Wie geht dieser geometrische Ort aus § 63 hervor?

3) Die Axe eines Rotationskegels zu finden, welcher die Ebene α in der Kante a berührt und

α) eine zweite Gerade b zur Kante hat (a und b müssen sich schneiden);

β) eine zweite Ebene β berührt.

Die folgenden Aufgaben handeln von zwei Kegeln, welche ihr Centrum gemeinsam haben.

4) Man lege durch die Axen a und b dieser Kegel eine Ebene γ und beweise:

- α) Wenn beide Kegel eine Kante d ausserhalb γ gemeinsam haben, so haben sie noch eine weitere Kante f gemein. a, b, d, f sind Kanten einer symmetrischen vierseitigen Ecke.
- β) Wenn die Kegel eine Kante d in der Ebene γ gemein haben, so haben sie auch die zur Kante d gehörige Tangentenebene gemeinsam. (Berührungskegel.)

5) Welcher ist der geometrische Ort für die Axen der Kegel, welche einen gegebenen Kegel in einer bestimmten Kante berühren.

6) Die Axe eines Kegels zu finden, welcher einen gegebenen Kegel in einer bestimmten Kante berührt, wenn

- α) noch eine weitere Kante,
- β) noch eine weitere Tangentenebene gegeben ist.

7) Welches ist der geometrische Ort für die Axen von Kegeln, welche zwei Kegel von gleicher Amplitude berühren.

8) Alle Tangentenabschnitte, welche von einem Punkte ausserhalb der Kugel bis zu den Berührungspunkten reichen, sind gleich gross.

9) Alle Punkte einer Kugel, welche von einem gegebenen Punkte derselben gleiche Entfernung haben, liegen auf einem Kreise.

10) α) Zu beweisen, dass der in § 30, Uebung 3 besprochene Körper regelmässig ist (regelmässiges Ikosaeder).

Andeutung. Durch Erfüllung der in § 30, Uebung 2 besprochenen Bedingung sind alle Kanten des Körpers gleich und die Seitenflächen sind regelmässige Dreiecke. Zugleich sieht man aus § 30, Uebung 1 ϵ , dass die Ecken des Körpers auf einer Kugel mit dem Centrum O liegen. Aus § 70, 9 schliesst man, dass die Punkte G, I, P, T, U , welche von R dieselbe Entfernung haben, auf einem Kreise liegen. $G I P T U$ ist also ein regelmässiges Fünfeck. Es folgt nun die Gleichheit der Keilwinkel an den Kanten RG, RI, RP, RT, RU aus der Congruenz von dreiseitigen körperlichen Ecken, welche die Seiten $108^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ haben. Damit ist der Beweis der Regelmässigkeit geliefert.

β) Man berechne auch nach § 61, 7 die Keilwinkel an einer der Kanten $RG, RT \dots$

11) Man soll beweisen, dass der in § 31, Uebung 3 besprochene Körper regelmässig ist.

Andeutung. Aus § 31, Uebung 4 geht hervor, dass die Ecken des Körpers auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt O liegen. Alsdann ist das Fünfeck $Q F N M E$ einem auf dieser Kugel befindlichen Kreise einbeschrieben und regelmässig, weil es gleiche Seiten hat. Der Körper ist also von lauter regelmässigen Fünfecken begrenzt. Die Keilwinkel an den Kanten sind alle von derselben Grösse, weil die dreiseitigen Ecken, denen sie angehören, gleichseitig und unter einander congruent sind (die Seiten derselben betragen sämtlich 180°). Man berechne auch die Grösse dieser Keilwinkel nach § 60, 10.

12) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte von Kugeln, welche

- α) die Gerade a in einem bestimmten Punkte A berühren;
- β) die Gerade a so berühren, dass eine durch a gelegte Ebene α Tangentenebene ist;
- γ) die Ebene α in einem bestimmten Punkte A berühren.

13) Den Mittelpunkt einer Kugel zu construiren, welche

- α) durch zwei Punkte A und B geht und in dem ersten eine Ebene α berührt;
- β) zwei Ebenen α und β berührt und zwar die erste in einem gegebenen Punkte A ;
- γ) durch drei Punkte A, B, C geht und in dem ersten eine Gerade a berührt;
- δ) drei Ebenen α, β, γ berührt und in der ersten eine gegebene Gerade a zur Tangente hat;
- ϵ) zwei Gerade a und b in den bestimmten Punkten A und B berührt;
- ζ) die Ebenen α und β so berührt, dass die in ihnen liegenden Geraden a und b Tangenten sind.

Man gebe in jedem Fall die Zahl der Lösungen an.

14) Wie kann man die geometrischen Oerter in 12) aus § 67 durch das Zusammenfallen zweier Elemente ableiten?

15) Wenn eine Kugel durch einen Punkt gehen oder eine Ebene berühren soll, so ist dies eine einfache Bedingung. Durch die Beantwortung von 14 kommt man zur Erkenntniss, dass in jedem Falle von Aufgabe 13 vier einfache Bedingungen gegeben sind.

16) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kugeln, welche eine gegebene Kugel in einem bestimmten Punkte berühren?

17) Zwei Kugeln α und β mögen sich in einem Punkte P berühren. Wenn α von einer dritten Kugel (von einer Ebene) γ in P berührt wird, so wird auch β berührt.

18) Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, welche

- α) eine Kugel α und eine Ebene β berührt und zwar die Kugel in einem bestimmten Punkte A ;
- β) eine Kugel α in einem bestimmten Punkte A berührt und durch einen andern Punkt B geht.

Andeutung. Man ersetze die Kugel α durch ihre Tangentenebene in A (vgl. 17).

19) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte derjenigen Kugeln, welche zwei gleich grosse Kugeln berühren.

20) Den Mittelpunkt einer Kugel zu finden, welche zwei gleich grosse Kugeln berührt und zwar die eine in einem bestimmten Punkte.

21) Den Mittelpunkt einer Kugel zu bestimmen, welche zwei Kugeln α und β von ungleichen Radien berührt und zwar die eine in einem bestimmten Punkte A .

Andeutung. Ersetze die Kugel α durch eine andere, welche mit β gleichen Radius hat und die Kugel α in A berührt.

b) Uebungen über Kartenprojection.*

1) Stereographische Polarprojection.

Wenn der Kreis in Fig. 1 auf Tab. III um den Durchmesser NS gedreht wird, so beschreibt er eine Kugel, unter welcher wir uns die Erdkugel vorstellen wollen. N und S seien Nordpol und Südpol. Die Punkte A und B beschreiben bei der Drehung den Aequator. Die Gerade UV beschreibt bei derselben Drehung die Tangentenebene an die Kugel im Punkte N . Der Punkt M der Kugel wird durch den Strahl SM nach M' hin auf diese Tangentenebene projecirt. Denkt man dasselbe für alle Punkte der nördlichen Halbkugel gemacht, so erhält man die sogenannte stereographische Polarprojection derselben. Stereographische Projectionen heissen nämlich diejenigen, bei welchen der Projectionsmittelpunkt auf der Kugel liegt, während die Bildebene durch die Tangentenebene im diametral gegenüberliegenden Punkte (Gegenpunkt) dargestellt ist. Die stereographische Polarprojection ist in Fig. 2 dargestellt. Man erkennt leicht:

α) Die Meridiane werden durch gerade Linien abgebildet, welche durch den Pol N gehen. Die Theilung N, d, e, f auf jedem dieser Meridiane wird auf die in Fig. 1 angedeutete Weise bestimmt.

β) Die Parallelkreise werden als concentrische Kreise um den Mittelpunkt N abgebildet. Die Abbildungen der verschiedenen Längengrade auf jedem einzelnen Parallelkreise sind von derselben Länge.

Nach α) und β) kann die Projection ausgeführt werden.

2) Stereographische Aequatorialprojection. Bei der stereographischen Aequatorialprojection liegt der Projectionsmittelpunkt B und der Berührungspunkt A der Tangentenebene in dem Aequator.

α) Der durch den Projectionsmittelpunkt B (Fig. 3) gehende Meridian $BNAS$ wird als gerade Linie (SN in Fig. 4) abgebildet. Die Theilung auf diesem Meridian ist mit der in α besprochenen identisch und in Fig. 3 und Fig. 4 angedeutet.

β) Der Aequator wird auch als gerade Linie abgebildet, welche auf SN senkrecht steht. Die Theilung auf dem Aequator ist mit der Theilung des Meridians identisch.

γ) Der zum Durchmesser AB senkrechte Meridian wird als ein Kreis abgebildet, welcher den Punkt A (Fig. 3 und 4) zum Mittelpunkt und den Abstand Af zum Radius hat. Die Abbildungen der Breitegrade auf diesem Meridiane haben gleiche Länge.

Um nun die Construction des Netzes zu vollenden, muss man einen Satz anwenden, den wir ohne Beweis anführen: „Bei der stereographischen Projection wird jeder auf der Kugeloberfläche gelegene Kreis wieder als Kreis abgebildet“. Nun bestimmen zum Beispiel die

* Hierzu gehören die Figuren auf Tab. III.

dreier Punkte N, e', S in Fig. 4 einen Kreis als Meridian. Der Mittelpunkt M desselben liegt auf der Geraden $f'f''$, welche NS senkrecht halbiert und auf der Mittelsenkrechten von Ne' .

Auf dieselbe Weise werden die Mittelpunkte der andern Meridiankreise gefunden. Andererseits bestimmen die Punkte g, d, k einen Kreis als Abbildung des 30. Parallelkreises und man findet seinen Mittelpunkt als Schnittpunkt von SN mit der Mittelsenkrechten von gd oder dk . Ebenso werden die Mittelpunkte der übrigen Parallelkreise bestimmt.

3) Orthographische Polarprojection. Wenn die Bildebene durch die Tangentenebene in einem Pole dargestellt ist und die Projectionsstrahlen senkrecht auf der Bildebene stehen (parallel zur Erdaxe laufen), so entsteht die Orthographische Polarprojection. Ueber ihre Herstellung gilt das in 1, α und β gesagte, nur wird die Theilung eines Meridians aus Fig. 5 anstatt aus Fig. 1 entnommen.

4) Die orthographische Aequatorialprojection entsteht, wenn die Bildebene durch die Tangentenebene in einem Aequatorpunkt dargestellt ist, während die Projectionsstrahlen mit dem zur Bildebene senkrechten Durchmesser AB (in Fig. 3) parallel sind. Für die Herstellung gilt das in 2, α , β und γ gesagte, nur muss die Theilung des mittleren Meridians und des Aequators aus Fig. 5, statt aus Fig. 1 entnommen werden. Im Weiteren finden aber bedeutende Unterschiede statt. Die Parallelkreise werden, wie leicht zu sehen, durch gerade Linien abgebildet. Wenn also die Punkte in Fig. 4 durch orthographische Projection bestimmt wäre, so müsste d mit g und k auf einer Geraden liegen. Man betrachte ferner zwei Meridiane, welche von dem mittleren Meridiane gleichen Abstand haben. Ihre Projectionsstrahlen liegen auf derselben Cylinderfläche. Die Bildebene schneidet diese Fläche in einer Ellipse, deren grosse Axe der Abstand NS von Nordpol und Südpol ist. Die beiden von N und S begrenzten Hälften der Ellipse sind die Abbildungen der beiden Meridiane. Wenn die Punkte der Fig. 4 durch orthographische Projection bestimmt wären, so würde die fragliche Ellipse für die Meridiane $Nd'S$ durch die grosse Axe NS und die kleine Axe $d'd'$ bestimmt sein.

Für die Bestimmung der Ellipsenpunkte auf den Parallelkreisen bemerke man, dass die Theilungen auf den Parallelkreisen mit der Theilung auf dem Aequator ähnlich ist. Diese Theilungen kann man daher aus der Aequatortheilung nach G. I, § 65a erhalten.

5) Wenn die Grösse x des Längengrades auf dem Aequator eines Globus gegeben ist, so soll man die Grösse des Längengrades auf dem in der Breite α gezogenen Parallelkreise angeben.

Antwort. Diese Grösse ist $x \cdot \cos \alpha$. Wenn MC in Fig. 7 die Grösse des Längengrades auf dem Aequator vorstellt und der Kreis mit dem Radius CM um C gezogen ist, so stellt die aus der Figur ersichtliche Construction die Grössen $aa', bb', cc' \dots$ der Längengrade auf dem 10., 20. u. s. w. Parallelkreise dar. (Die Punkte A bis F gehören dieser Construction nicht zu.)

6) Centrische Projection auf eine Kegelfläche. FO sei die

Tangente in H an den Kreis in Fig. 6. Wird die Figur um den Durchmesser NS gedreht, so beschreibt der Kreis einen Globus mit der Axe NS . A und B beschreiben den Aequator und die Tangente fO beschreibt eine Kegelfläche. Man denke sich die Punkte des Globus aus dem Centrum C auf diese Kegelfläche projicirt. Man erkennt leicht:

- α) Die Meridiane werden als Kanten des Kegels abgebildet. Die Theilung auf einem Meridian ist durch Fig. 6 versinnlicht.
- β) Die Parallelkreise sind durch Parallelkreise des Kegels abgebildet. Der durch H gehende Parallelkreis fällt mit seiner eigenen Abbildung zusammen, wodurch seine Theilung bestimmt ist. Die nach der Theilung dieses Parallelkreises gezogenen Meridiane (Kegelkanten) werden die andern Abbildungen der Parallelkreise von selbst theilen. Wenn man den Kegel längs einer Seite aufgeschnitten denkt, so kann er in eine Ebene ausgebreitet werden und man erhält ein ebenes Kartennetz, wie es Fig. 8 versinnlicht.
- 7) Verschiedene Fälle der Projection in 6):
 - α) Der Punkt H liegt an einem Pole. Die Kegelfläche geht in eine Ebene über. Man erhält die in Sternkarten öfters angewendete centrische Polarprojection. Die Anfertigung eines Netzes geschieht ähnlich wie bei der stereographischen Polarprojection, nur wird die Theilung eines Meridians durch Strahlen bewirkt, welche vom Centrum und nicht vom Punkte S aus gezogen werden.

Die folgenden beiden Fälle der centrischen Projection werden nicht angewendet, aber sie bilden den Uebergang zu der in Atlanten gewöhnlichen „conischen Projection“.

- β) Der Punkt H ist auf dem Aequator gelegen. Der Kegel geht in einen Cylinder über. Die Meridiane sind parallele Geraden. Die Theilung auf jedem derselben ist leicht anzugeben und in Fig. 7 durch die Theilung $M, A, B, C, D \dots$ versinnlicht. Die Parallelkreise werden durch parallele Geraden abgebildet, welche zu den Meridianen senkrecht sind. Die Abbildungen der Längengrade auf dem Aequator und den Parallelkreisen sind gleich lang.
- γ) Der Punkt H liegt zwischen dem Pol und dem Aequator. Dieser Fall ist speziell in 6 besprochen. Es sei noch bemerkt, dass die Länge HO (Fig. 6 und 8) auch berechnet werden kann. Sie ist $r \cdot \cotang \alpha$, wenn r der Radius des abzubildenden Globus und α die Breite von H ist. Die Grade auf dem durch H gehenden Parallelkreise haben die Länge

$$\frac{2r \cdot \pi}{360} \cdot \cos \alpha.$$

7) Conische Projection. Wir bringen bei der in 6) so wie in 7) unter β und γ beschriebenen Projection Modificationen an, durch welche jedoch ihr Character als perspectivische Projection verloren geht.

- α) Man führe von H aus auf dem mittleren Meridian HO (Fig. 8) die Theilung so durch, dass man allen Breiten-graden dieselbe Länge gibt, welche sie auf dem Globus haben, nämlich $\frac{2\pi r}{360}$, wenn r der Radius des Globus ist.
- β) Man theile 1) ausser dem mittleren Parallelkreise auch noch die am obern und untern Rande der Karte befindlichen Parallelkreise nach 5) und ziehe die durch je drei entsprechende Punkte (m, n, o in Fig. 10) bestimmten Kreise. Man hat alsdann kreisförmige Meridiane erhalten, wie sie gewöhnlich bei der Aequatorialprojection verwendet werden. Oder: man theile 2) den mittleren Parallelkreis, welcher durch H geht, gar nicht, sondern zwei Parallelkreise in der Mitte der obern und untern Kartenhälfte (nach Aufgabe 5) und verbinde die entsprechenden Punkte (z. B. m und n in Fig. 9) durch gerade Linien. Man kann auch 3) die in gleichen Breiteunterschieden auf einander folgenden Parallelkreise sämmtlich theilen, um die entsprechenden Punkte durch geradlinige Strecken oder aus freier Hand durch Curven zu verbinden. Unter gleichzeitiger Anwendung der Modificationen α) und β) entsteht die vielgebrauchte conische Kartenprojection. (Siehe Uebung 9.)

9) In Fig. 9 und 10 sind zwei Beispiele dieser Projection veranschaulicht. Beidemale ist diese Grösse von zehn Längengraden des Aequators oder von zehn Breitengraden gleich fünf Millimeter gesetzt. Der Abstand HO in Fig. 9 ist $r \cdot \cotg 50^\circ$, wenn r der Radius des zugehörigen Globus ist. Man hat $r = \frac{5 \cdot 36}{2\pi}$ Millimeter. Die Länge von zehn Graden auf dem 40. und 60. Parallelkreise sind bezüglich in Millimetern ausgedrückt, $5 \cdot \cos 40^\circ$ und $5 \cdot \cos 60^\circ$, und können nach 5) durch Construction gefunden werden. In Fig. 10 sind in derselben Weise ausser dem Aequator die Parallelkreise ab und cd getheilt und die entsprechenden Punkte durch Kreise verbunden. Der Mittelpunkt des Kreises wird als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von mn und dem Aequator gefunden.

10) Mercator's Projection. Bei dem in 6 β) besprochenen Falle lassen wir eine Veränderung in der Meridiantheilung eintreten, welche in Fig. 11 veranschaulicht ist. Zehn Längengrade auf dem Aequator, sowie auf allen Abbildungen von Parallelkreisen, mögen die Länge x haben (in der Figur ist $x = 5^{\text{mm}}$). Man mache nun $Ha = x$, $ab = \frac{x}{\cos 10^\circ}$, $bc = \frac{x}{\cos 20^\circ}$, $cd = \frac{x}{\cos 30^\circ}$ und so fort; oder: $Ha = x$, $ab = x \cdot \sec 10^\circ$, $bc = x \cdot \sec 20^\circ$, $cd = x \cdot \sec 30^\circ$ u. s. w. und betrachte das rechtwinklige Dreieck mno , welches die beiden Catheten $mn = x$ und $no = \frac{x}{\cos 30^\circ}$ hat. Die entsprechenden Punkte M, N, O bilden auf dem Globus ein anderes rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten

MN und NO Bogen von Kreisen sind, und man hat $MN = x \cdot \cos 30^\circ$, (nach Uebung 5) $NO = x$. Da nun $mn : no = 1 : \frac{1}{\cos 30^\circ} = \cos 30^\circ : 1$ und auch $MN : NO = \cos 30^\circ : 1$, so haben die Dreiecke mno und MNO das Verhältniss zweier Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich. Wäre es nun erlaubt, das Dreieck MNO als ein ebenes anzusehen, so könnte man auf die Aehnlichkeit der Dreiecke mno und MNO schliessen. Nun kann man aber nach der in der Rede stehenden Art ein Kartennetz so entwerfen, dass man nicht nach Unterschieden von zehn Grad, sondern nach solchen Bruchtheilen eines Grades fortschreitet, die klein genug sind, um als gerade Strecken angesehen zu werden. In diesem Falle wird innerhalb derselben Grenzen ein Dreieck auf der Karte mit dem entsprechenden Dreieck auf dem Globus oder der Erde ähnlich sein. Die Projection, welche auf solche Weise gefertigt ist und bei welcher ein Abschnitt der Karte, welcher bestimmte Dimensionen nicht überschreitet, mit der Originalfigur auf der Erdoberfläche ähnlich ist, wird nach dem Erfinder Mercator's Projection und nach dem Gebrauch Seekartenprojection genannt. Der Nutzen für die Schifffahrt erhellt aus folgender Betrachtung. Man denke sich einen Punkt, der von einem angenommenen Punkte der Erde aus sich so bewegt, dass er alle Meridiane unter demselben Winkel α schneidet. Der Punkt wird sich in Windungen um einen der Pole bewegen, ohne diesen je zu erreichen. Eine solche Linie heisst Loxodromie. Parallelkreise und Meridiane sind Grenzfälle dieser Curven für die Werthe $\alpha = 90$ und $\alpha = 0^\circ$. Ein Schiff, dessen Axe mit der Magnetenadel fortwährend denselben Winkel bildet (Curs des Schiffes) durchläuft eine Loxodromie. Die Abbildung einer Loxodromie in Mercator's Projection muss eine Linie sein, welche mit den durch parallele Gerade dargestellten Abbildungen der Meridiane denselben Winkel α bildet. Diese Linie muss daher in allen Punkten dieselbe Richtung haben, das heisst gerade sein.

11) Das Netz zu einer Karte α) in stereographischer und β) in orthographischer Polarprojection zu zeichnen, welche bis 50° Breite reichen soll, wenn die Länge eines Breitegrades auf dem abzubildenden Globus $2,5\text{mm}$ sein soll. Länge und Breite soll von fünf zu fünf Graden angegeben sein.

Andeutung. Der Radius r des Globus wäre alsdann
$$\frac{2,5\text{mm} \cdot 360}{2\pi} = 14,32\text{cm}.$$

Die Theilung auf dem Meridian kann man auch durch Rechnung finden; so ist z. B. in Fig. 1 $Nd = 2r \cdot \text{tg } 15^\circ$ und in Fig. 5 $Nd = r \cdot \sin 30^\circ$.

12) Das Netz zu der Karte einer Hemisphäre α) in stereographischer und β) in orthographischer Aequatorialprojection zu zeichnen, wenn der Radius des abzubildenden Globus zu $3,5\text{cm}$ angenommen ist.

13) Das Netz zu einer Karte in centrischer Polarprojection bis 45° Breite zu zeichnen, wenn der Radius r des abzubildenden Globus 5cm sein soll.

Andeutung. Die Theilung auf einem Meridiane kann durch Rechnung gefunden werden. Ein Punkt, dessen Breite 80° ist, hat vom Mittelpunkte der Karte die Entfernung $r \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$. Der Radius des kreisförmigen Kartenfeldes ist $r \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = r$.

14) Das Netz zu einer Karte von Europa in conischen Projection zu zeichnen. Mittelpunkt der Karte soll der Punkt von 50° nördlicher Breite und 35° östlicher Länge sein. Ein Breitengrad auf dem mittleren Meridian soll die Länge von 5^{mm} haben. Das Netz soll von dem 30sten bis 70sten Grade nördlicher Breite und von dem 0ten bis zum 70sten Grade östlicher Länge von Ferro reichen. Breite und Länge sollen von fünf zu fünf Graden angegeben sein. Man soll den 40sten und 60sten Parallelkreis nach Uebung 5) theilen und die entsprechenden Punkte durch geradlinige Meridiane verbinden.

Andeutung. Der Radius r des abzubildenden Globus ist

$$\frac{360 \cdot 5^{\text{mm}}}{2 \cdot \pi} = 28,65^{\text{cm}}.$$

Die Entfernung HO (Fig. 6) ist $r \cdot \operatorname{cotg} 50^\circ = 23,77^{\text{cm}}$. Die Grösse der Längengrade auf dem 40sten Parallelkreise sind $5^{\text{mm}} \cdot \cos 40^\circ$. Man kann sie aber kürzer durch Construction finden.

15) Das Netz zu einer Karte von Asien in conischer Projection zu zeichnen (siehe Uebung 8 und 9). Der Punkt von 40° nördlicher Breite und 100° östlicher Länge von Ferro soll in die Mitte der Karte kommen. Ein Längengrad auf dem Aequator oder ein Breitengrad auf dem mittleren Meridian soll die Länge von 2^{mm} erhalten. Die Meridiane und Parallelkreise sollen von zehn zu zehn Graden gezogen werden. Die Karte soll vom 0ten bis zum 80sten Grade nördlicher Breite und vom 40sten bis 160sten Grade östlicher Länge reichen. Man soll alle gezeichneten Parallelkreise theilen und die entsprechenden Theilpunkte aus freier Hand durch Curven verbinden.

Andeutung. Der Radius r des abzubildenden Globus ist

$$r = \frac{2^{\text{mm}} \cdot 360}{2 \pi} = 11,46^{\text{cm}}.$$

Der Abstand HO für diese Karte ist $r \cdot \operatorname{cotg} 40^\circ = 13,64^{\text{cm}}$.

16) Das Netz zu einer Karte von Afrika nach Uebung 9) und Fig. 10 zu zeichnen. Nur soll ein Grad des Aequators oder des mittleren Meridians die Länge von 2^{mm} haben.

Fünfter Cursus.

X. Abschnitt.

Figuren auf der Kugelfläche.

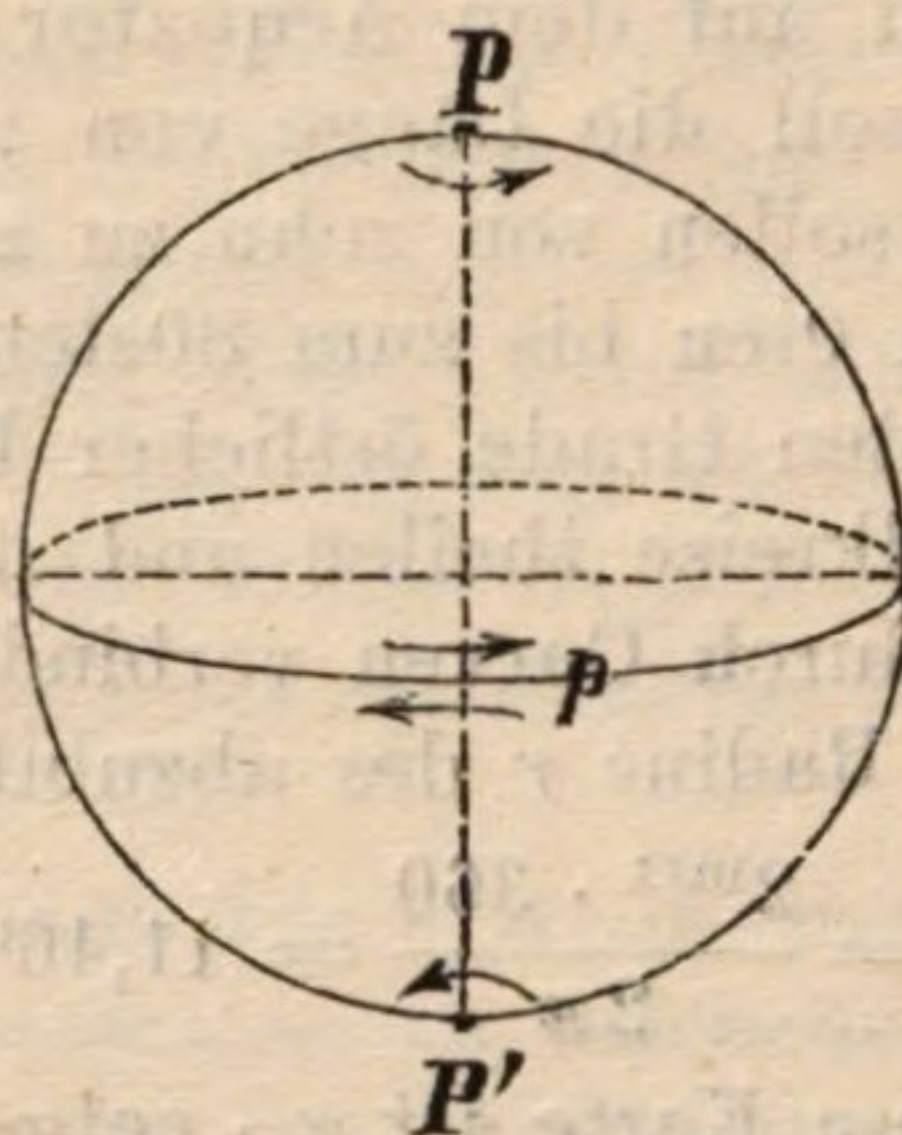
§ 71. Punkte und Hauptkreise der Kugel. — Pol und Polare.

a) Zu jedem Punkte P einer Kugel (Fig. 67) gehört derjenige Punkt P' als „Gegenpunkt“, welcher mit P zusammen einen Durchmesser begrenzt.

b) Der Hauptkreis p , dessen Ebene zu PP' senkrecht ist, heisst die Polare von P und P' .

c) Auf jedem Hauptkreise unterscheidet man zwei Drehungsrichtungen. Dieselben werden den beiden Polen des Hauptkreises zugeordnet. Jedem Pole gehört diejenige Drehungsrichtung zu, welche, von ihm aus gesehen, als links herum führend erscheint. Siehe die Figur.

Fig. 67.



α) Jede durch das Centrum gelegte Ebene bestimmt auf der Kugel einen Hauptkreis (Fig. 67).

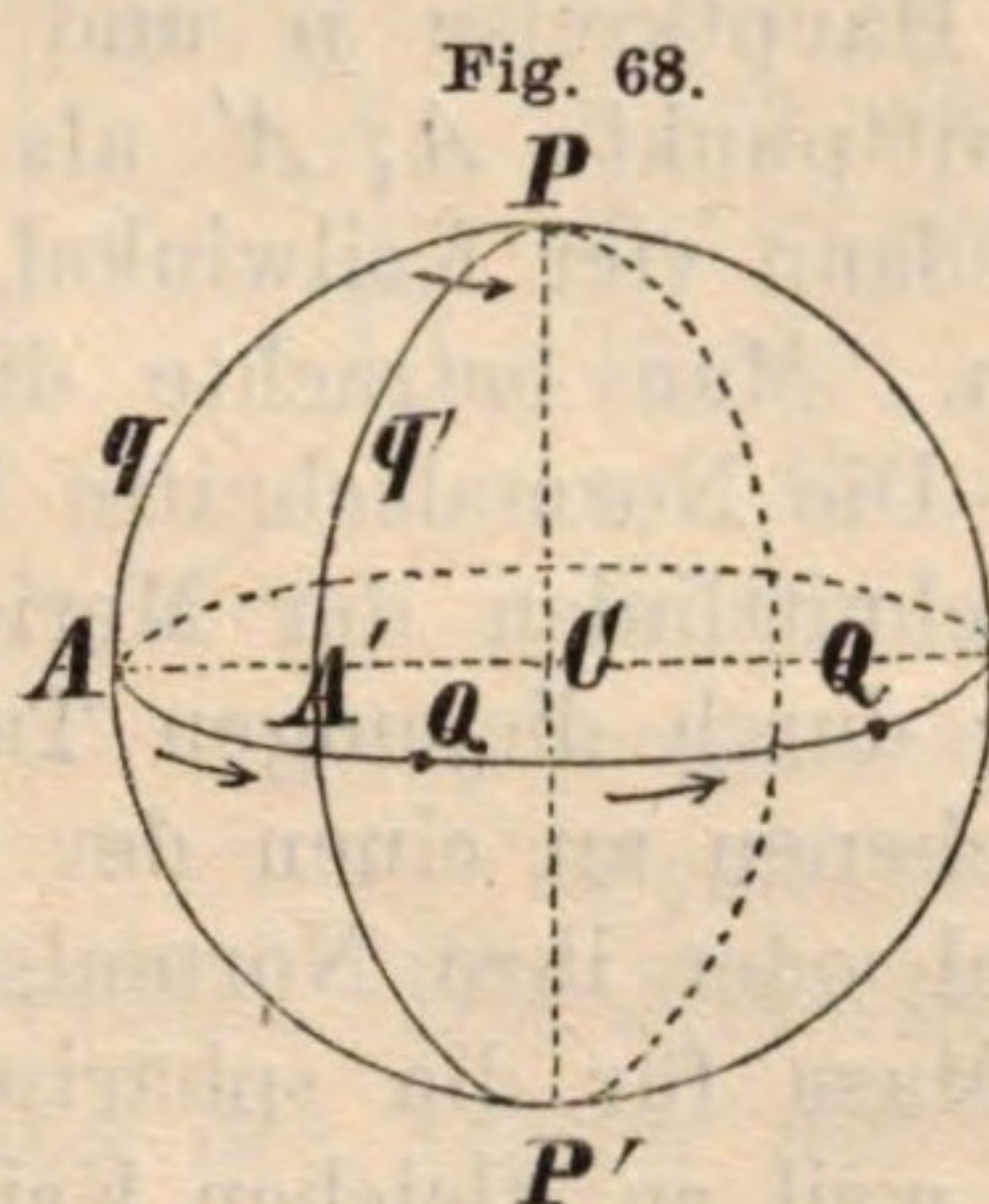
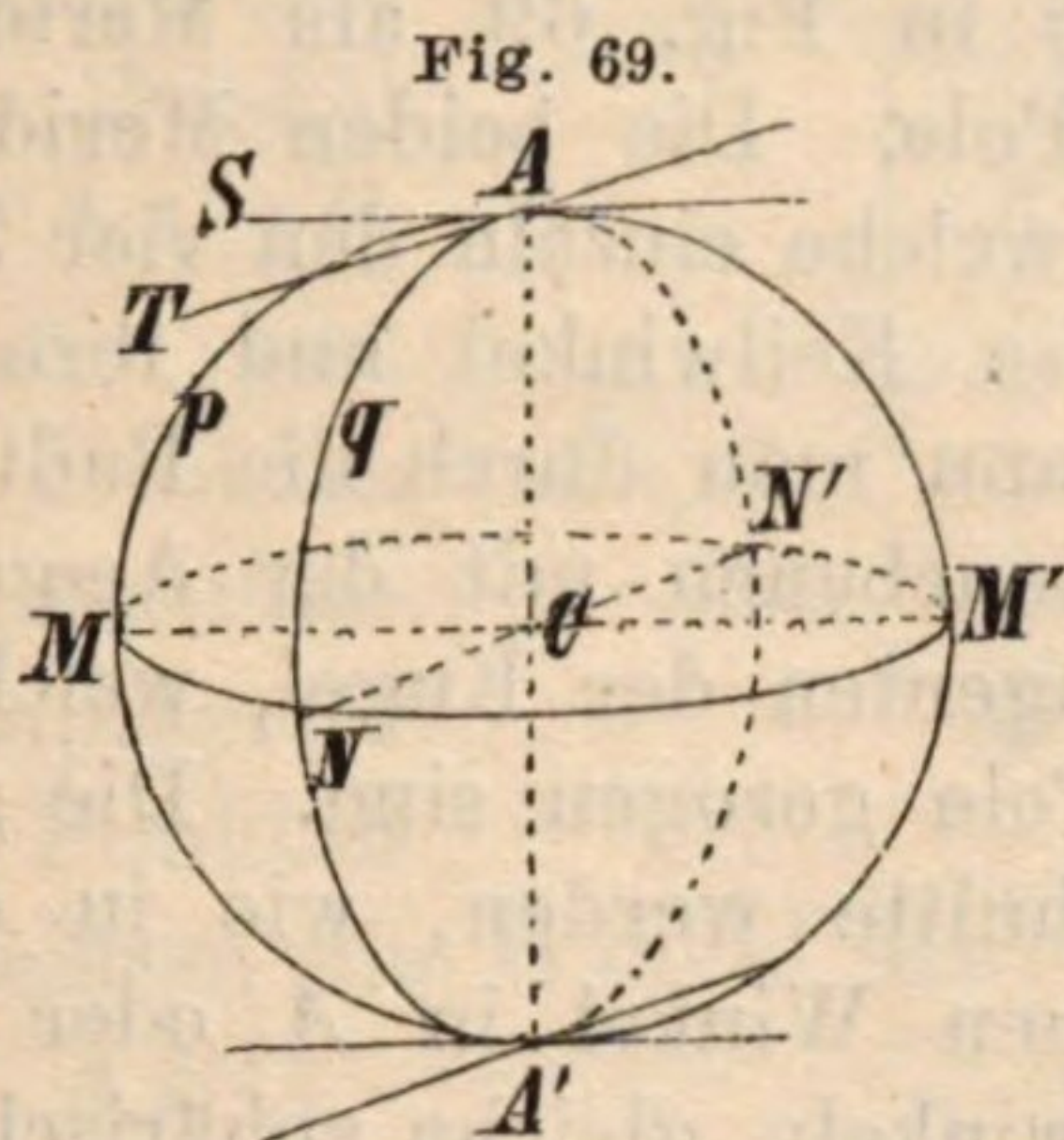
β) Die Punkte P, P' , welche den zur Ebene von p senkrechten Durchmesser begrenzen, heissen „Pole“ von p .

§ 72. Sphärische Abstände und Winkel.

a) Durch einen Punkt P der Kugel (Fig. 67) gehen unendlich viele Hauptkreise, welche auch den Gegenpunkt

α) Auf einem Hauptkreise p (Fig. 67) liegen unendlich viele Punkte. Die Polaren dieser Punkte gehen durch die

P' von P enthalten (Büschel von Hauptkreisen). Die Pole dieser Kreise liegen auf der Polaren von P und P' .



b) Zwei Punkte M und N (Fig. 69) bestimmen einen einzigen Hauptkreis. Derselbe wird durch diese Punkte und ihre Gegenpunkte M' , N' in vier Bogen getheilt, welche unter einander gleich oder supplementär sind.

c) Der sphärische Abstand zweier Kugelpunkte M und N (Fig. 69) ist der Bogen eines Hauptkreises, welcher durch M und N begrenzt ist.

Man betrachtet M oder N als Anfangspunkt, je nachdem man den Abstand durch Bewegung von M nach N oder umgekehrt durchlaufen denkt.

β) Zwei Hauptkreise p und q (Fig. 69) schneiden sich in zwei Gegenpunkten A und A' . Sie theilen zugleich die Kugel in vier Felder, welche sphärische Zweiecke genannt werden.

γ) Der Punkt A der Kugel (Fig. 69) ist der Scheitel von vier sogenannten sphärischen Winkeln. Einer derselben wird mit MAN bezeichnet. Die Drehungsrichtungen AM und AN sind seine Schenkel.

Man betrachtet AM oder AN als Anfangsschenkel des Winkels, je nachdem man den Winkel durch Drehung von p gegen q oder umgekehrt beschrieben denkt.

Sphärische Winkel, welche von ausserhalb gesehen durch eine links herum gehende Drehung des Anfangsschenkels beschrieben werden, fasst man als positive Winkel auf, wenn nicht das Gegentheil bemerkt ist.

d) Dem sphärischen Winkel MAN gehört der von den Tangenten an die Kreise p und q in A gebildete Winkel SAT zu, welcher als Mass desselben betrachtet wird.

Zur Anlehnung an geographische Betrachtungen denke man sich die Hauptkreise p und q in Fig. 69 als Meridiane und ihre Schnittpunkte A, A' als Pole. Die beiden Meridianebenen bilden alsdann vier Keilwinkel, welche einzeln den vier Zweiecken zugehören. Man betrachte diese Keilwinkel und ihre Normalschnitte. Die Normalschnitte kann man durch die Radien bilden, welche Schnittlinien der Meridianebenen mit der Aequatorebene sind oder durch diejenigen Tangenten der Kugel, welche in den Meridianebenen an einen der Pole gezogen sind. Die genannten Keilwinkel oder ihre Normalschnitte werden, wie in δ) gesagt ist, als Mass für die sphärischen Winkel in A oder A' angenommen, weil zu gleichen Keilwinkeln gleiche sphärische Winkel gehören und umgekehrt.

e) Die sphärischen Abstände (PA, PA' in Fig. 68) eines Punktes P von allen Punkten seiner Polaren sind gleich und betragen 90° .

ε) Die sphärischen Winkel ($AA'P, A'AP$ in Fig. 68), welche ein Hauptkreis p mit allen durch seinen Pol gezogenen Hauptkreisen bildet, sind gleich und betragen 90° .

f) Wenn ein Hauptkreis (q Fig. 68) in einer Drehung um einen Punkt P den Winkel von x Grad beschreibt, so durchläuft der Pol Q dieses Hauptkreises einen sphärischen Abstand von ebenfalls x Grad auf der Polaren von P .

φ) Wenn ein Punkt der Kugel auf einem Hauptkreise p den Abstand von x Grad durchläuft, so beschreibt die zugehörige Polare in einer Drehung um den Pol von p den sphärischen Winkel von ebenfalls x Grad.

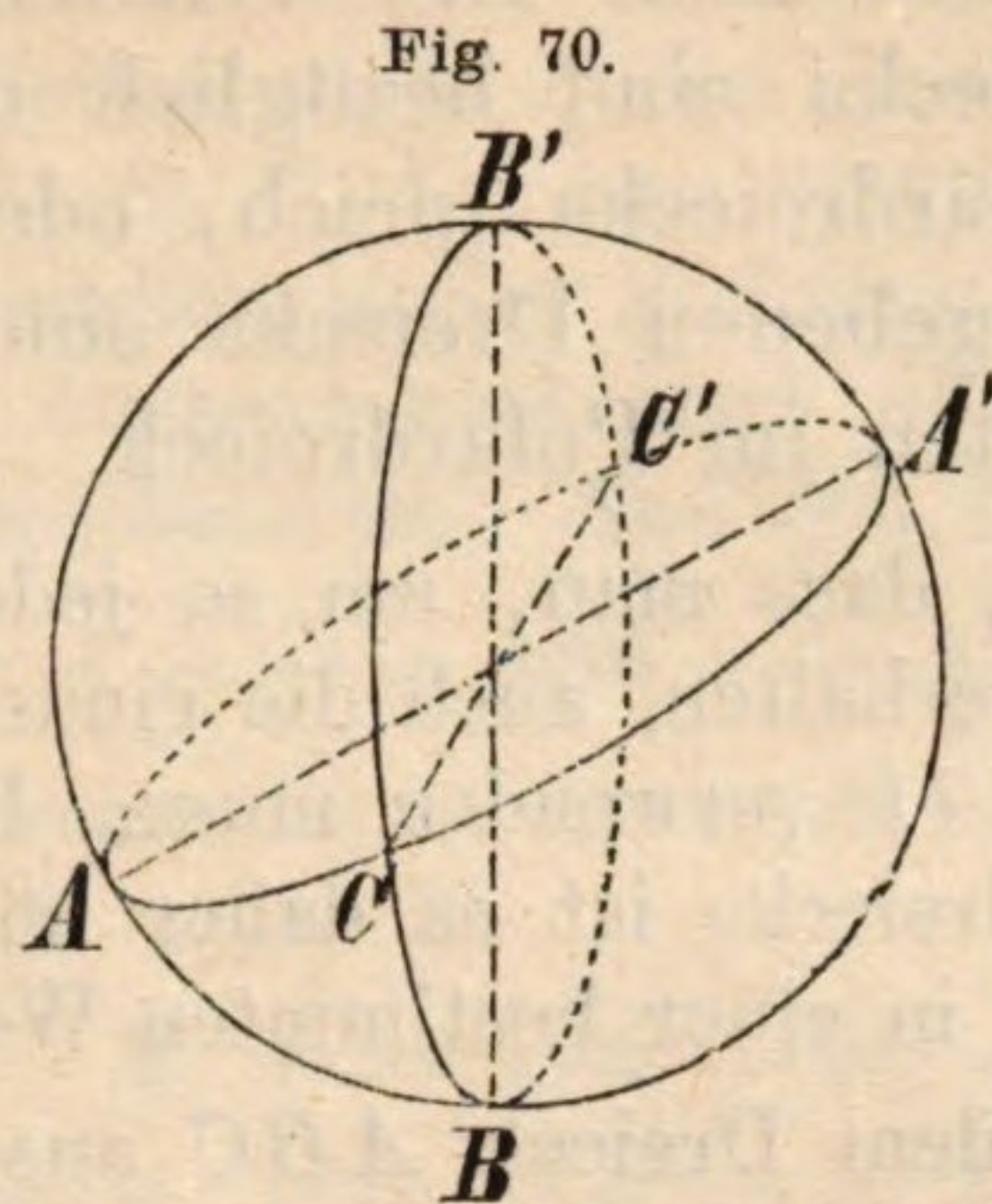
Beweis. Der sphärische Winkel APA' (Fig. 68), welchen der Kreis q beschreiben muss, um in die Lage q' zu kommen, wird durch den Bogen AA' der Polaren von P gemessen (§ 72 d). Der Bogen AA' ist aber dem von dem Pole Q durchlaufenen Wege QQ' gleich, da beide mit dem Abstände $A'Q$ zusammen 90° betragen (§ 72 e).

§ 73. Das sphärische Dreieck.

a) Drei Punkte mit ihren Gegenpunkten sind die Ecken

α) Zwei Hauptkreise theilen die Kugel in vier Felder.

von acht sphärischen Dreiecken (vergl. α) und Scheitel der Winkel in denselben. Die drei Winkel ABC, BCA, CAB , welche die von den drei Punkten A, B, C bestimmten Hauptkreise in diesen Punkten bilden, heissen die Winkel des Dreiecks ABC .



Ein dritter Hauptkreis, der nicht durch die Schnittpunkte der beiden ersten geht, theilt jedes dieser Felder wieder in zwei Theile, so dass im Ganzen acht Felder entstehen, welche sphärische Dreiecke genannt

werden. Die drei Hauptkreise sind die Träger der Seiten in allen acht sphärischen Dreiecken.

b) Von dem Dreieck ABC (Fig. 70) ausgehend beachtet man zunächst die drei Nebendreiecke, von welchen jedes mit dem ursprünglichen zusammen ein Zweieck ausmacht. Das Dreieck ABC hat mit jedem Nebendreieck eine Seite gemeinsam. Die dieser Seite gegenüberliegenden Winkel sind in beiden Dreiecken gleich, da sie demselben Zweieck zugehören. Die übrigen entsprechenden Stücke des Dreiecks ABC und eines Nebendreiecks sind supplementär. Die Gegenpunkte der Ecken im Dreieck ABC bilden das sogenannte Gegendreieck $A'B'C$ desselben. Es hat mit dem gegebenen Dreieck entsprechend gleiche Seiten und gleiche Winkel, ist aber mit ABC' von entgegengesetztem Sinne und kann mit ihm nicht zur Deckung gebracht werden, wenn das gegebene Dreieck ABC nicht gleichschenkelig ist. Ausserdem sind noch die drei Scheiteldreiecke des Dreiecks ABC zu unterscheiden. Sie sind die Gegendreiecke der drei Nebendreiecke.

§ 74. Das Polardreieck.

a) Zu jedem sphärischen Dreieck gehört ein einziges sogenanntes Polardreieck, dessen Ecken Pole zu den Seiten des gegebenen Dreiecks sind, während seine Seiten auf den Polaren liegen, welche den Ecken des ursprünglichen Dreiecks zugehören. Das ursprüngliche Dreieck erscheint als Polar-

dreieck seines Polardreiecks. Die Seiten und Aussenwinkel des gegebenen Dreiecks sind bezüglich den Aussenwinkeln und Seiten des Polardreiecks gleich, oder: die Seiten und Winkel des gegebenen Dreiecks sind die Supplemente der Winkel und Seiten im Polardreieck.

Es versteht sich, dass man, um zu jedem Dreieck ein einziges Polardreieck zu erhalten, auch die eindeutige Beziehung von Pol und Polare in § 71 verwenden muss. Bei der Bestimmung der Ecken des Polardreiecks ist es daher nöthig, dass man sich das gegebene Dreieck in einer bestimmten Weise umlaufen denkt.

Wir gehen von dem Dreieck ABC aus (Fig. 71 oder 72), dessen Seiten in den durch Pfeile angedeuteten Richtungen durchlaufen werden sollen. Während man von A nach B geht, beschreibt die Polare a von A in einer Drehung um den Pol O der Seite AB den Aussenwinkel ω des Polardreiecks und kommt dadurch in die Lage b der Polaren des Punktes B . In B angekommen, wird der Zuschauer, welcher das Dreieck ABC umläuft, in einer Drehung um den Punkt B den Aussenwinkel β

Fig. 71.

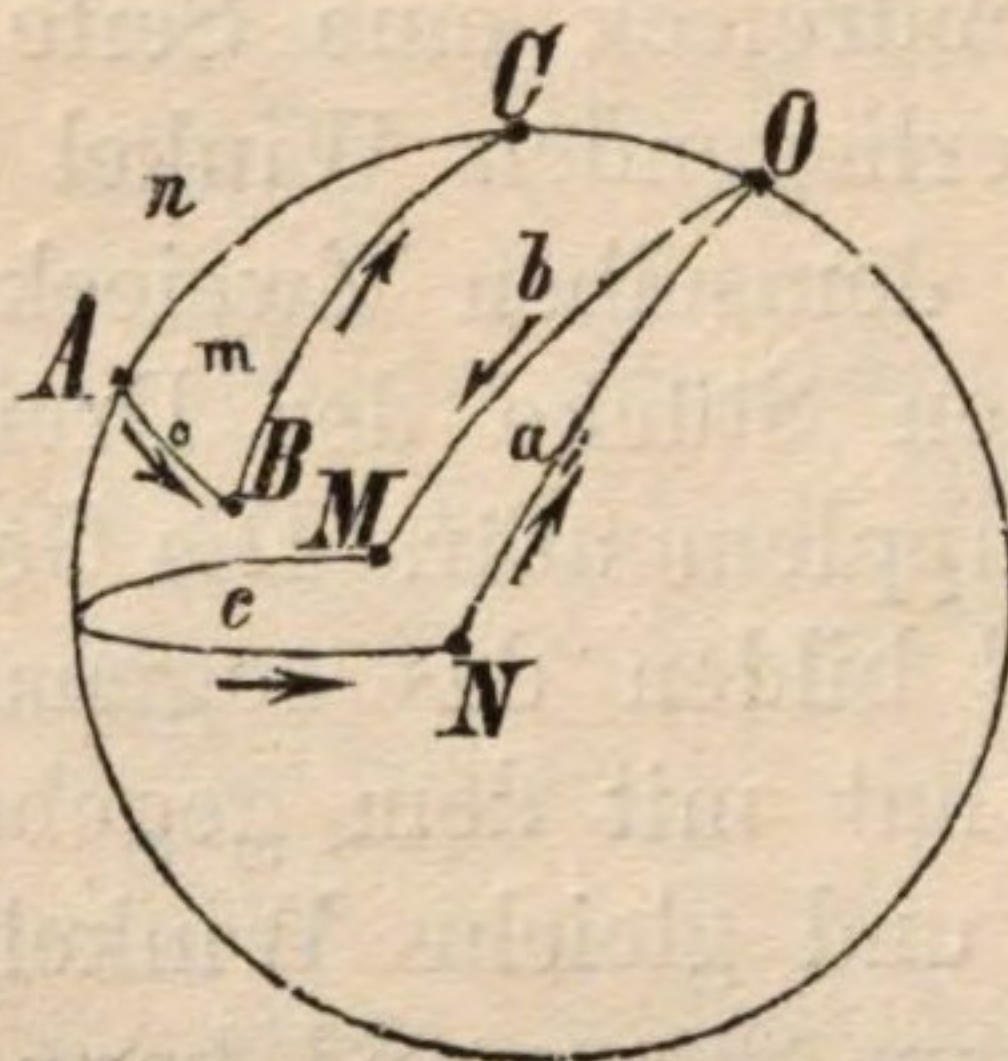
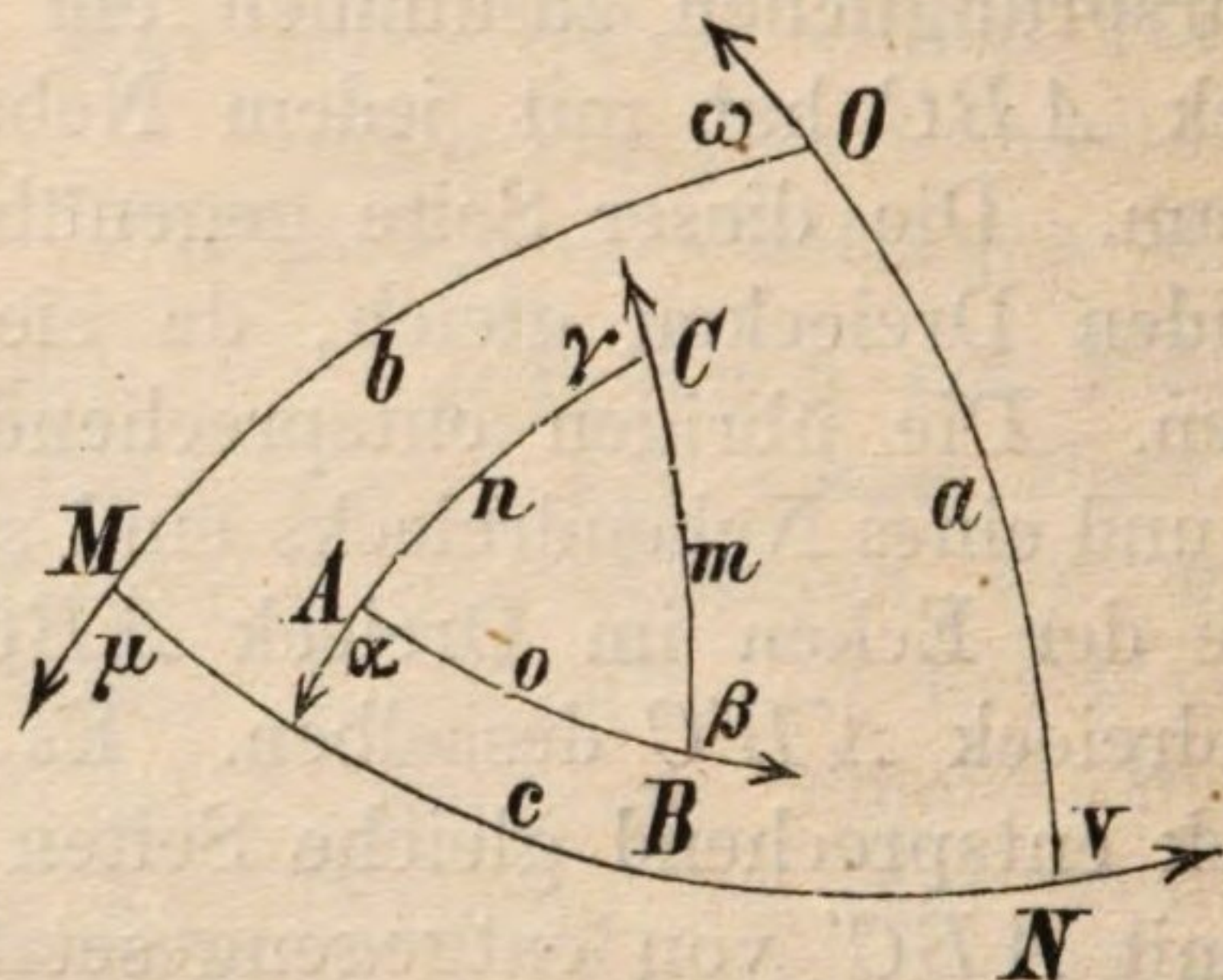


Fig. 72.



beschreiben, um in die Richtung der Seite BC oder m zu kommen. Während dessen hat der Pol O der Seite o auf der Polaren von B einen Weg OM oder b zurückgelegt, welcher als Seite des Polardreiecks auftritt. Durchläuft nun der Zuschauer die Seite BC oder m , so wird sich die Polare b von B um den Pol M der Seite m drehen und dabei einen Aussenwinkel μ des Polardreiecks beschreiben, um in die Richtung c der Polaren von C zu fallen. Fährt man auf diese Weise fort, so erkennt man, dass das Polardreieck in dem oben genannten Zusammenhange mit dem gegebenen Dreiecke entsteht. Die Ecken O, M, N des Polardreiecks sind die Pole der Seiten σ, m, n des ursprünglichen, und diese Seiten werden (wie die Pfeile anzeigen) von

jenen Polen aus gesehen in der Richtung von rechts nach links durchlaufen. Die Seiten a, b, c des Polardreiecks sind die Polaren der Ecken A, B, C des ursprünglichen und werden von diesen Ecken aus gesehen in der Richtung von rechts nach links durchlaufen. Die Aussenwinkel sind alle durch links herumgehende Drehung beschrieben. Aus den Gleichungen

$$m = \mu, n = \nu, o = \omega \text{ und } \alpha = a, \beta = b, \gamma = c$$

ergibt sich, wenn man die Aussenwinkel als Supplemente der Innenwinkel einführt:

$$m = 180 - M, n = 180 - N, o = 180 - O;$$

$$180 - A = a, 180 - B = b, 180 - C = c.$$

Hier sind die Winkel der Dreiecke durch die grossen Buchstaben an den Ecken bezeichnet.

§ 75. Die Fläche und die Winkel des sphärischen Dreiecks.

a) Ein sphärisches Dreieck und sein Gegendreieck haben gleiche Fläche.

Die drei Durchmesser AA', BB', CC' (Fig. 74), welche die entsprechenden Punkte beider Dreiecke verbinden, sind Kanten eines Rotationskegels, dessen Axe nach § 63c mit diesen Kanten gleiche Winkel bildet.

Fig. 73.

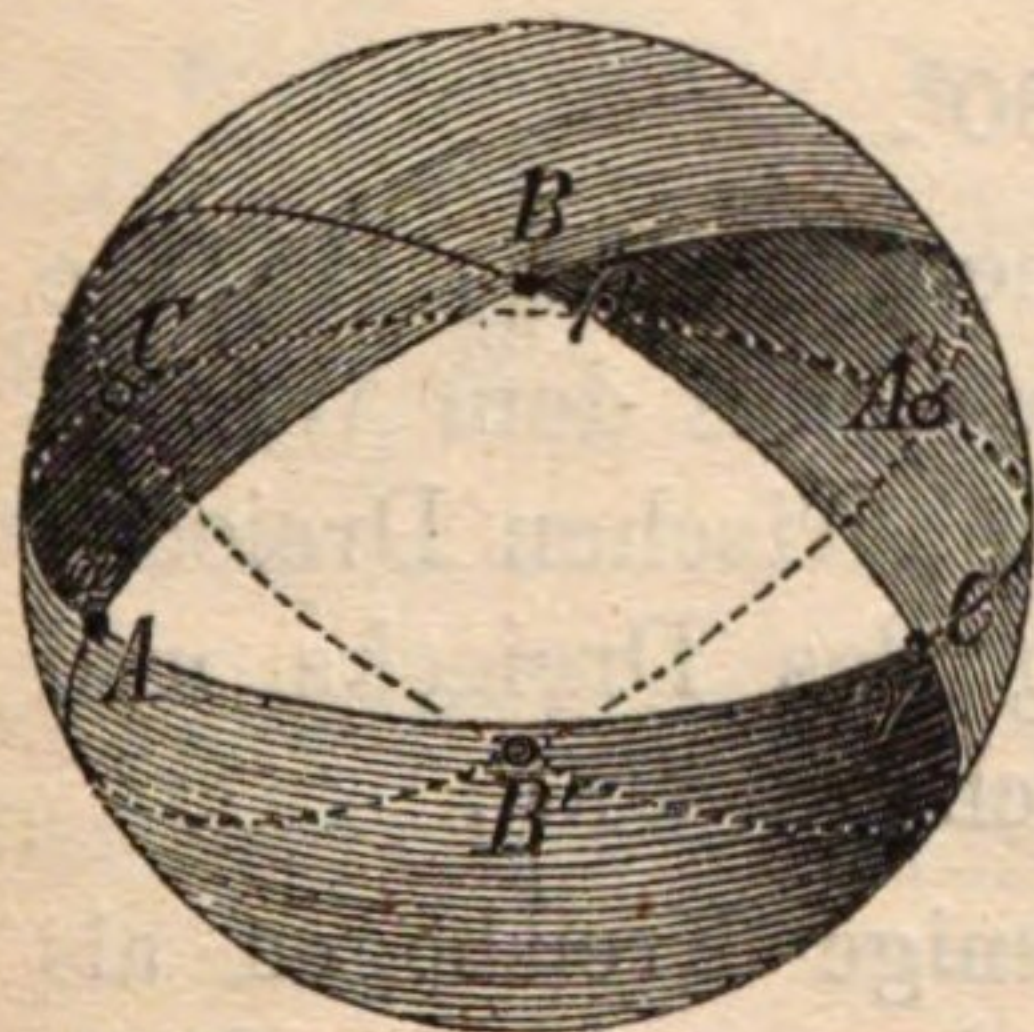
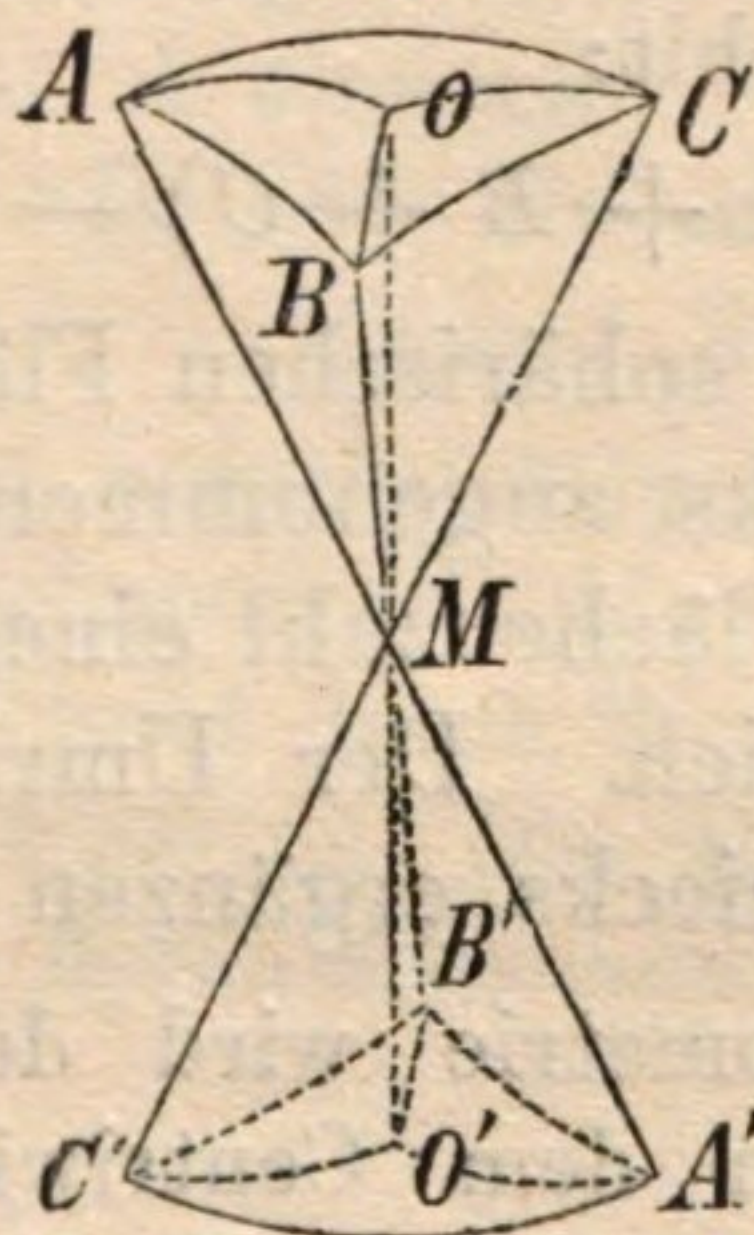


Fig. 74.



Die Schnittpunkte O und O' der Axe mit der Kugel liefern also durch ihre Verbindung mit den Ecken der Dreiecke in dem einen Dreieck die gleichen sphärischen Abstände OA, OB, OC und in dem andern die ebenfalls gleichen Bogen $O'A', O'B', O'C'$. Jedes Dreieck

ist dadurch in drei gleichschenklige sphärische Dreiecke getheilt, die sich paarweise als Dreieck und Gegendreiecke zugehören. Da aber jedes gleichschenklige Dreieck mit seinem Gegendreieck zur Deckung gebracht werden kann, folglich mit ihm gleiche Fläche hat, so sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ flächengleich, weil sie aus entsprechenden Theilen zusammengesetzt sind, die paarweise gleiche Fläche haben.

b) Die Summe der Aussenwinkel eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 360° . Um ebensoviel ist die Summe der Innenwinkel grösser als 180° .

β) Der Umring eines sphärischen Dreiecks ist kleiner als 360° . (Siehe den Beweis zu c).

Zusatz zu b). Der Ueberschuss ε der inneren Winkel über 180° wird der sphärische Excess des Dreiecks genannt. Die Fläche des Dreiecks ist halb so gross als die Fläche des sphärischen Zweiecks, das dem Winkel ε zugehört.

Aus Fig. 73 erkennt man, dass die Zweiecke, welche den Aussenwinkeln α, β, γ des Dreiecks zugehören, zusammen die ganze Kugel, das Dreieck ABC und das ihm gleiche Gegendreieck $A'B'C'$ ausgenommen, bedecken. Man denke sich die Zweiecke mit den Winkeln α, β, γ aneinandergelegt, so bleibt auf der Kugel noch ein Zweieck frei, dessen Winkel mit ε bezeichnet werde und dessen Fläche doppelt so gross sein muss als die Fläche des Dreiecks ABC (oder des Gegendreiecks $A'B'C'$). Die Bedeutung von ε ist leicht zu finden. Da nämlich die ganze Kugel als ein Zweieck mit dem Winkel 360° betrachtet werden kann, so hat man $\varepsilon = 360 - (\alpha + \beta + \gamma)$, womit die erste Behauptung in b) bewiesen ist. Da ferner die drei Aussenwinkel des Dreiecks ABC mit den Innenwinkeln A, B, C zusammen sechs rechte Winkel betragen, so muss die Summe der Innenwinkel um ebensoviel grösser als 180° sein, als der Summe der Aussenwinkel an 360° fehlt:

$$\varepsilon = (A + B + C) - 180^\circ.$$

c) Als Einheit der sphärischen Flächen wird die Hälfte des sphärischen Zweiecks angenommen, welches dem Winkel von 1° zugehört. Die Flächenzahl eines sphärischen Dreiecks ist seinem Excesse gleich. Der Umring des Dreiecks und die Fläche des Polardreiecks ergänzen sich zu 360° .

In der ebenen Geometrie wird derjenige Kreisbogen als Einheit gewählt, welcher dem Centriwinkel von 1° zugehört. Diese Einheit ist also der 360ste Theil des Kreises. Auf der Kugel dagegen nimmt man nicht den 360sten Theil der Oberfläche oder ein Zweieck mit dem Winkel von 1° zur Flächeneinheit, sondern die Hälfte dieses Zweiecks, so dass die Flächeneinheit 720 mal in der Oberfläche der Kugel enthalten ist. Man hat dadurch den Vorthail, dass die Flächen der sphärischen Figuren sich sehr einfach aus Winkeln berechnen. Das Zweieck mit dem Winkel ε , dessen Hälfte der Fläche eines sphärischen

Dreiecks vom Excesse ε gleich ist, hat die Flächenzahl 2ε . Folglich ist die Flächenzahl des Dreiecks durch ε selbst ausgedrückt.

Der Umring eines sphärischen Dreiecks ist von der Summe der Aussenwinkel im Polardreieck nicht verschieden (§ 74a). Zunächst folgert man hieraus nach b), dass der Umring kleiner als 360° ist, aber es ergibt sich auch, dass der Umring des Dreiecks mit der Summe der Innenwinkel im Polardreieck sechs Rechte oder mit dem sphärischen Excesse des Polardreiecks vier Rechte ausmache. Setzt man für den sphärischen Excess des Polardreiecks dessen Fläche, so erhält man den Beweis der letzten Behauptung.

d) Ein Aussenwinkel ist kleiner als die Summe der Innenwinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind, und grösser als ihre Differenz.

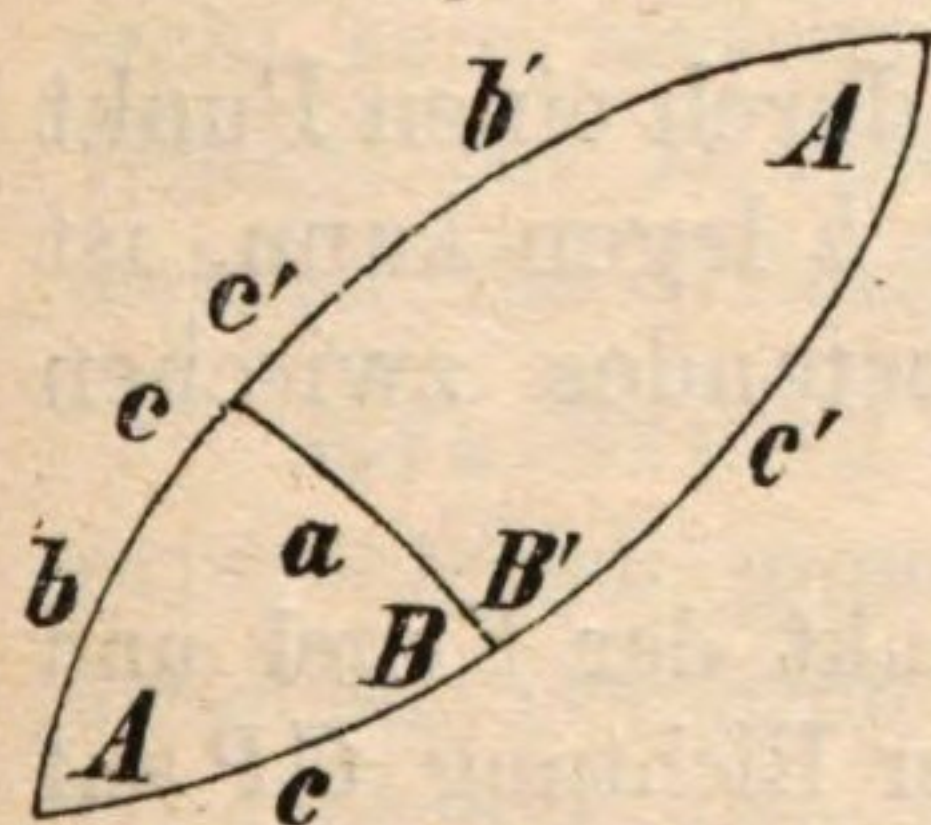
δ) Eine Seite ist kleiner als die Summe der beiden andern und grösser als ihre Differenz.

Um $C' < A + B$ zu erhalten (Fig 75) addire man beiderseits den Winkel C . Die erhaltene Ungleichung

$$180 < A + B + C$$

ist nach b) richtig und man schliesst rückwärts auf die Richtigkeit der vorgelegten Ungleichung. Dass $C' > B - A$ findet

Fig. 75.



man aus der für das Nebendreieck gültigen Beziehung $B < C' + A$, indem man beiderseits A abzieht.

In dem Nebendreieck (Fig. 75) ist

$$-a + b' + c' < 360^\circ.$$

Man berücksichtige, dass b und b' , c und c' supplementär sind, addire beiderseits $b + c$, so bleibt durch Wegheben des Postens 360°

auf beiden Seiten: $a < b + c$. Die Ungleichung $a > b - c$ findet man aus $a + c > b$ durch Abziehen von c auf beiden Seiten.

§ 76. Ungleichungen zwischen Winkeln und Seiten.

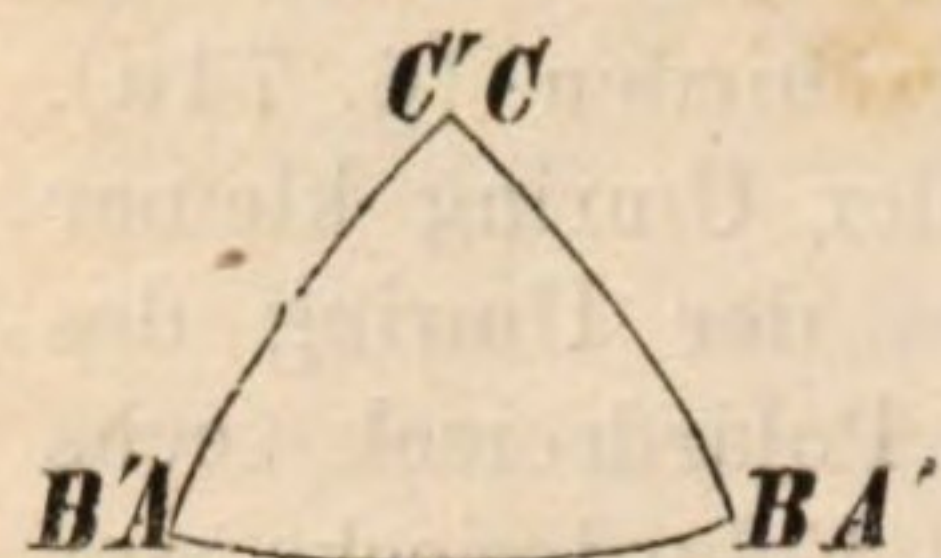
a) Gleichen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber. Der grösseren Seite liegt der grössere Winkel gegenüber.

α) Gleichen Winkeln liegen gleiche Seiten gegenüber. Dem grösseren Winkel liegt die grössere Seite gegenüber.

Wenn ein Dreieck gleichschenkelig ist, so deckt es sein Gegendreieck (§ 73 b). Dann decken sich die Winkel B' und A (Fig. 76).

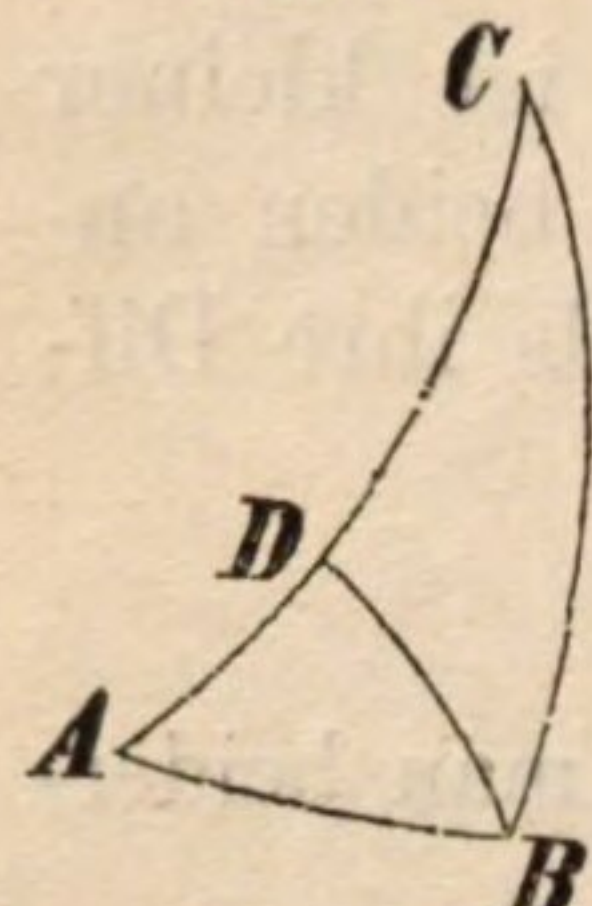
Da aber $B' = B$ (§ 73b), so folgt hieraus die Gleichheit von A und B . Wenn ein Dreieck zwei gleiche Winkel A und B hat,

Fig. 76.



so sind im Polardreieck die Seiten a' und b' gleich (§ 74a). Daraus schliesst man nach dem Vorigen die Gleichheit der Winkel A' und B'^* , was wieder im ursprünglichen Dreieck die Gleichheit von a und b erkennen lässt. Nachdem so die ersten Behauptungen in a) und α) bewiesen worden sind, gehen wir zur zweiten Behauptung in a) über. Wenn im Dreieck ABC (Fig. 77) der Winkel bei B grösser als der bei A ist, so ziehe man BD so, dass

Fig. 77.



$$\sphericalangle ABD = CAB$$

und folgere die Gleichheit von AD und BD nach der ersten Behauptung in α). Da nun nach § 75 δ

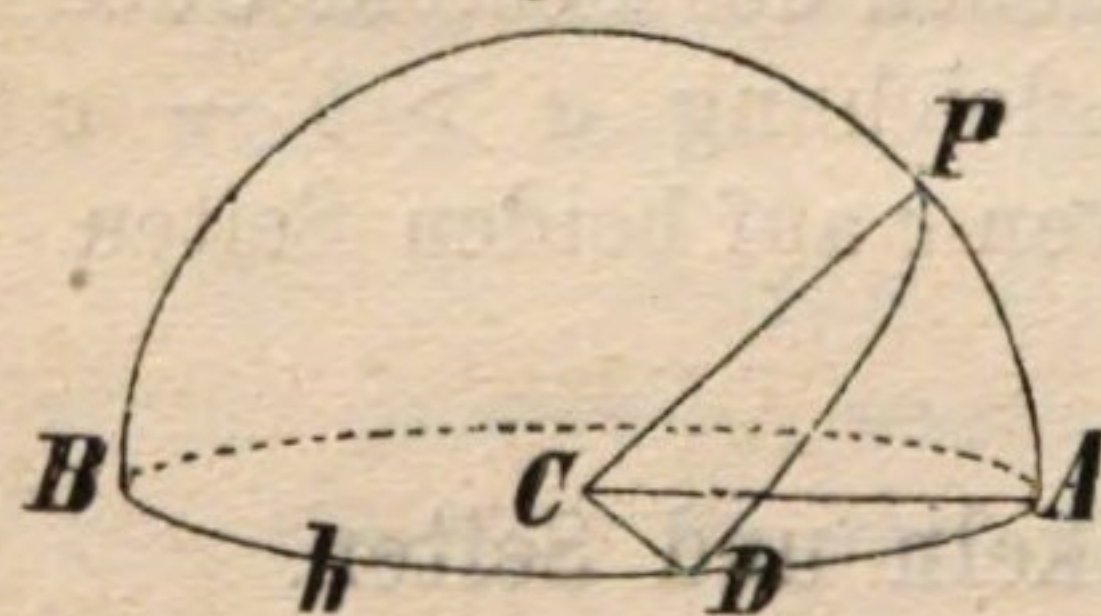
$$BD + DC > BC,$$

so erhält man durch das Einsetzen von AD für BD : $AC > BC$, was zu beweisen war. Ist aber in einem Dreiecke eine Seite b grösser als eine andere a , so ist im Polardreieck $B' < A'$ und deshalb $b' < a'$, nach der eben bewiesenen Behauptung. Hieraus schliesst man aber $B > A$, womit auch die zweite Behauptung in α) erwiesen ist.

b) Derjenige Hauptkreis, welchen man durch einen Punkt P senkrecht auf den gegebenen Hauptkreis h legen kann, ist der Träger des kürzesten sphärischen Abstandes zwischen P und h .

Beweis. C in Fig. 78 sei der Mittelpunkt der Kugel und

Fig. 78.



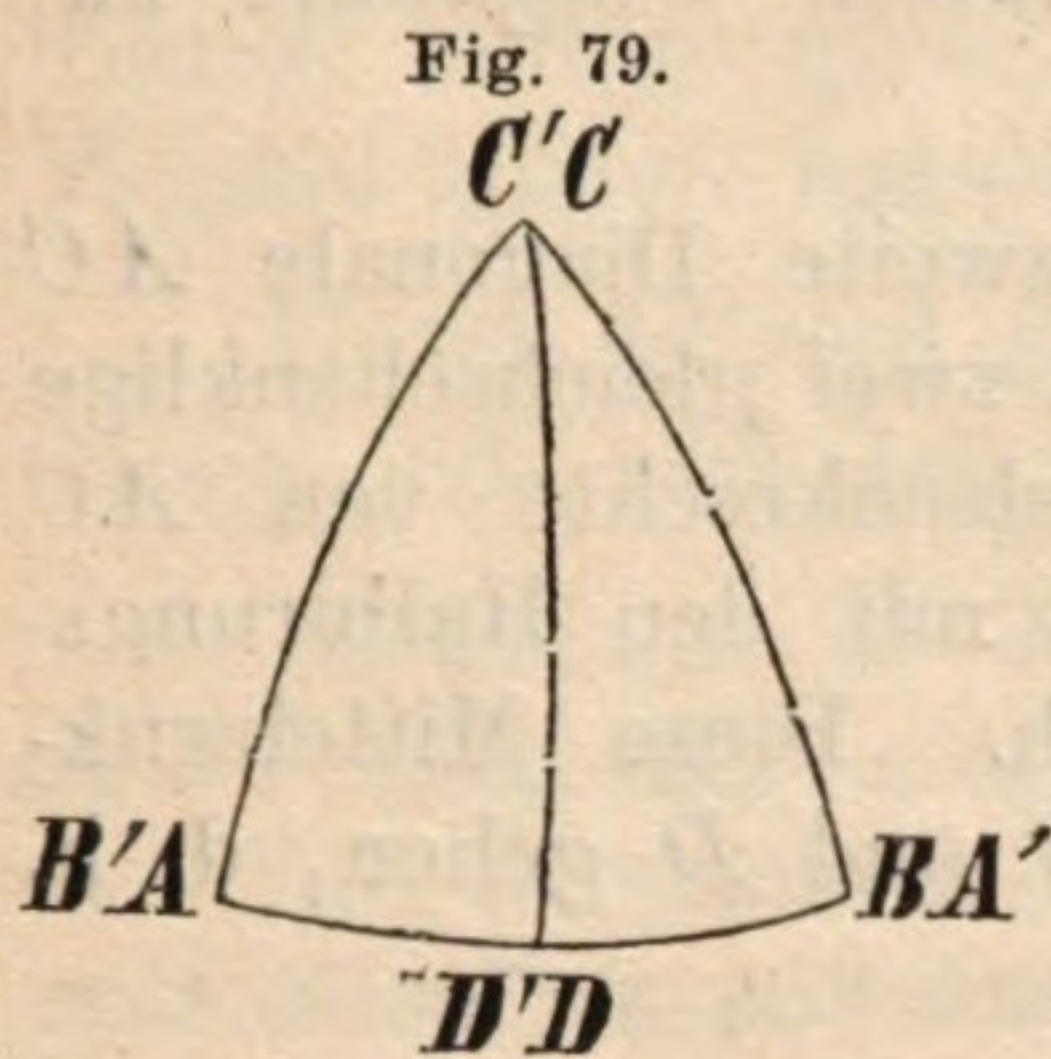
CA die Projection der Richtung CP auf die Ebene des Hauptkreises h . Der Winkel ACP schneidet die Kugel in dem Bogen PA des Hauptkreises APB , der auf p senkrecht steht. Da nun der Winkel ACP kleiner ist als irgend ein Winkel wie DCP (§ 8b), so ist auch der senkrechte sphärische Abstand PA kleiner als jeder andere Abstand PD zwischen P und h .

* Die Buchstaben A' und B' beziehen sich nicht auf Fig. 76, sondern auf das Polardreieck.

§ 77. Das gleichschenklige Dreieck.

a) In dem gleichschenkligen sphärischen Dreieck fällt die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze mit der Mittelsenkrechten der Grundlinie zusammen.

Beweis. Unter der Halbierungslinie und der Mittelsenkrechten sind die entsprechenden Hauptkreise verstanden. Um den Beweis von a) zu führen, denke man sich den Hauptkreis

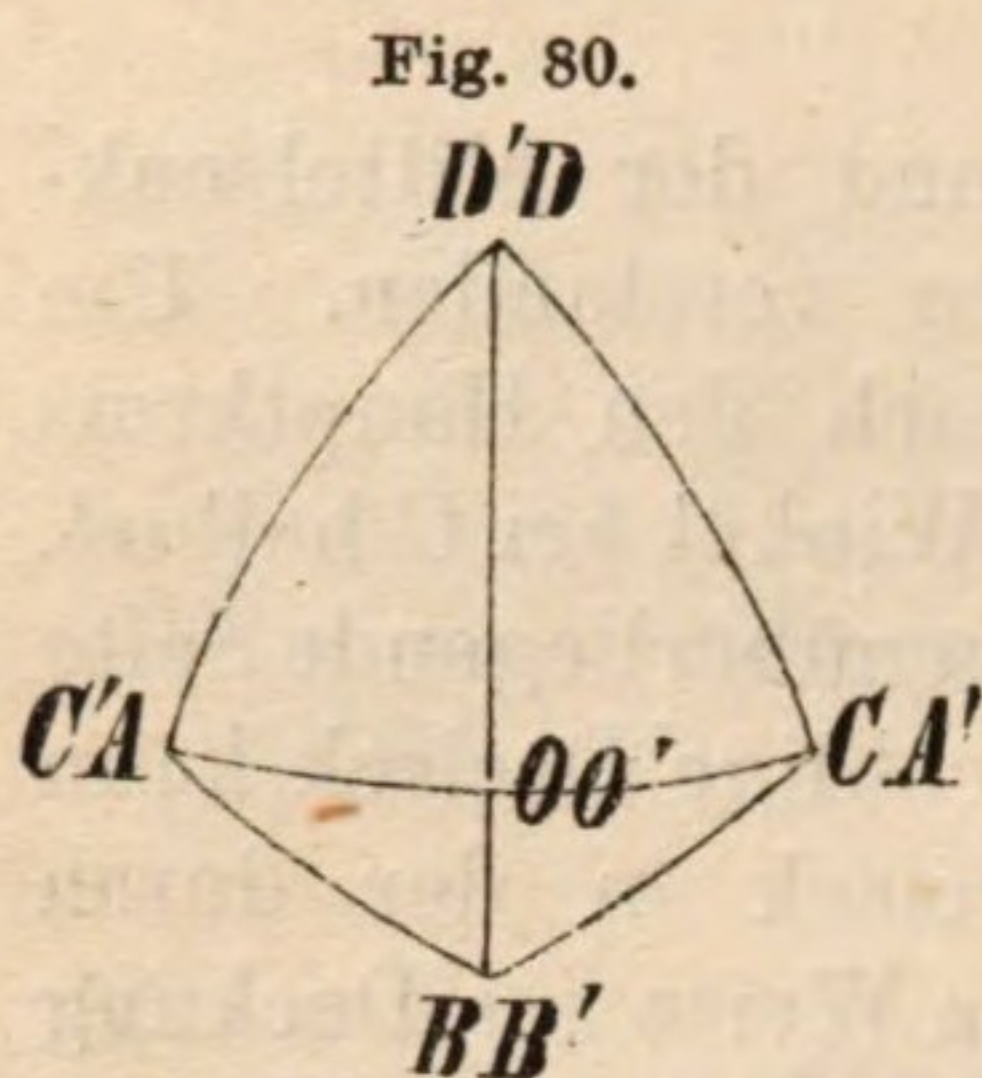


gezogen, welcher den Winkel bei C halbiert. Derselbe treffe die gegenüberliegende Seite in D . Das gleichschenklige Dreieck kann mit seinem Gegendreieck in der durch die Figur angedeuteten Weise zur Deckung gebracht werden (§ 73 b). Da die Winkel C und C' zur Deckung kommen, so decken sich auch die Halbierungslinien dieser Winkel und die Punkte D, D' . Dadurch kommen die Strecken DA und $D'B'$ zur Deckung und sind deshalb gleich. Weil aber auch $D'B' = DB$, so hat man $DA = DB$, d. h. D ist die Mitte von AB . Aus der Gleichheit der sich deckenden Winkel CDA und $C'D'B'$, und der Gleichheit der von $C'D'B'$ und CDB schliesst man die Gleichheit der Nebenwinkel CDA und CDB , welche somit recht sein müssen. Wenn aber D die Mitte von AB und die Winkel bei D recht sind, so ist der Hauptkreis BD derjenige, welcher die Grundlinie AB senkrecht halbiert.

Erklärung und Zusatz. Eine sphärische Figur wird symmetrisch genannt, wenn sie mit der zugehörigen Gegenfigur zur Deckung gebracht werden kann. Das gleichschenklige Dreieck ist also eine symmetrische Figur. Zwei Punkte (wie A und B) heissen entsprechend, wenn bei dem Aufeinanderlegen von Figur und Gegenfigur der eine auf den Gegenpunkt des andern fällt. Aus analogen Gründen werden auch die Strecken AC und BC sowie ihre Träger entsprechend genannt. Die Punkte C und D entsprechen sich selbst, weil jeder seinen eigenen Gegenpunkt deckt. CD ist ein sich selbst entsprechender Hauptkreis. Die Dreiecke ACD und BCD sind entsprechende Dreiecke in der symmetrischen Figur (oder: auch Dreiecke, welche sich in Bezug auf den Hauptkreis symmetrisch entsprechen). Das eine dieser Dreiecke deckt die Gegenfigur des andern.

§ 78. Das sphärische Deltoid.

a) Wenn ein sphärisches Viereck $ABCD$ (Fig. 80) zwei Paare gleicher Nachbarseiten hat (sphärisches Deltoid), welche in D und B zusammentreffen, so fällt die Diagonale BD (Längendiagonale) mit den Halbirungslinien der Winkel bei B und D und mit der Mittelsenkrechten der zweiten Diagonale zusammen.



Beweis. Die zweite Diagonale AC theilt das Viereck in zwei gleichschenklige Dreiecke. Die Mittelsenkrechte von AC ist also nach § 77a mit den Halbirungslinien der Winkel bei B und D identisch. Diese Mittelsenkrechte muss demnach durch die Punkte B und D gehen, d. h. mit der Diagonalen BD zusammenfallen.

Zusatz. Das sphärische Deltoid ist eine symmetrische Figur. Die beiden Dreiecke ABD und CBD entsprechen sich symmetrisch in Bezug auf den Hauptkreis BD .

Beweis. Man lege das Deltoid so auf seine Gegenfigur, dass das gleichschenklige Dreieck ABC sein Gegendreieck $C'B'A'$ deckt. Dann decken sich auch die Halbirungslinien BO und $B'O'$ und auf diesen die Gegenpunkte D und D' . Dabei deckt jedes der Dreiecke ABD und CBD sein Gegendreieck, das heisst diese Dreiecke entsprechen sich symmetrisch.

b) Wenn in einem sphärischen Vierecke zwei Nachbarseiten und die anliegenden Gegenwinkel unter sich gleich sind, so sind auch die übrigen Seiten einander gleich.

Beweis. Wenn im Viereck $ABCD$ (Fig. 80) die Seiten BA und BC , sowie die Winkel bei A und C unter sich gleich sind, so ergibt sich nach § 76a die Gleichheit der Winkel, welche in dem gleichschenkligen Dreieck ABC an der Grundlinie AC liegen. Hieraus und aus der Gleichheit der Viereckswinkel bei A und C folgert man die Gleichheit der Winkel DAC und DCA , sowie noch die Gleichheit der Seiten DA und DC .

§ 79. Congruenz sphärischer Dreiecke.

In folgenden Fällen kann man aus der Gleichheit von drei entsprechenden Stücken die Congruenz sphärischer Drei-

ecke von gleichem Sinne schliessen. Sind die Dreiecke entgegengesetzten Sinnes, so deckt in denselben Fällen ein Dreieck das Gegendreieck des andern.

a) Wenn die beiden Dreiecke die drei Seiten entsprechend gleich haben.

b) Wenn die beiden Dreiecke zwei Seiten und einen zu diesen Seiten gleichliegenden Winkel gleich haben.

α) Wenn die beiden Dreiecke die drei Winkel entsprechend gleich haben.

β) Wenn die beiden Dreiecke zwei Winkel und eine zu denselben gleichliegende Seite entsprechend gleich haben.

Unter b) und β) sind zwei Fälle zu unterscheiden, von denen jedesmal der eine eine Einschränkung erleidet.

Beweise. a) Wenn die Seiten zweier Dreiecke ABC und MNP (Fig. 81) entsprechend gleich sind, so betrachten wir zuerst den Fall, in welchem die Dreiecke verschiedenen Sinnes sind. Legt man dieselben mit den grössten Seiten an einander, so entsteht ein Deltoid, welches die gemeinsame Seite zur Längendiagonale hat. Daher deckt eines der Dreiecke das Gegendreieck des andern (§ 78a, Zusatz). Sind die Dreiecke gleichen Sinnes, so ist ABC mit dem Gegendreieck $M'N'P'$ entgegengesetzten Sinnes. ABC deckt daher, nach dem eben Gesagten das Gegendreieck von $M'N'P'$ oder das Dreieck MNP , was zu beweisen war.

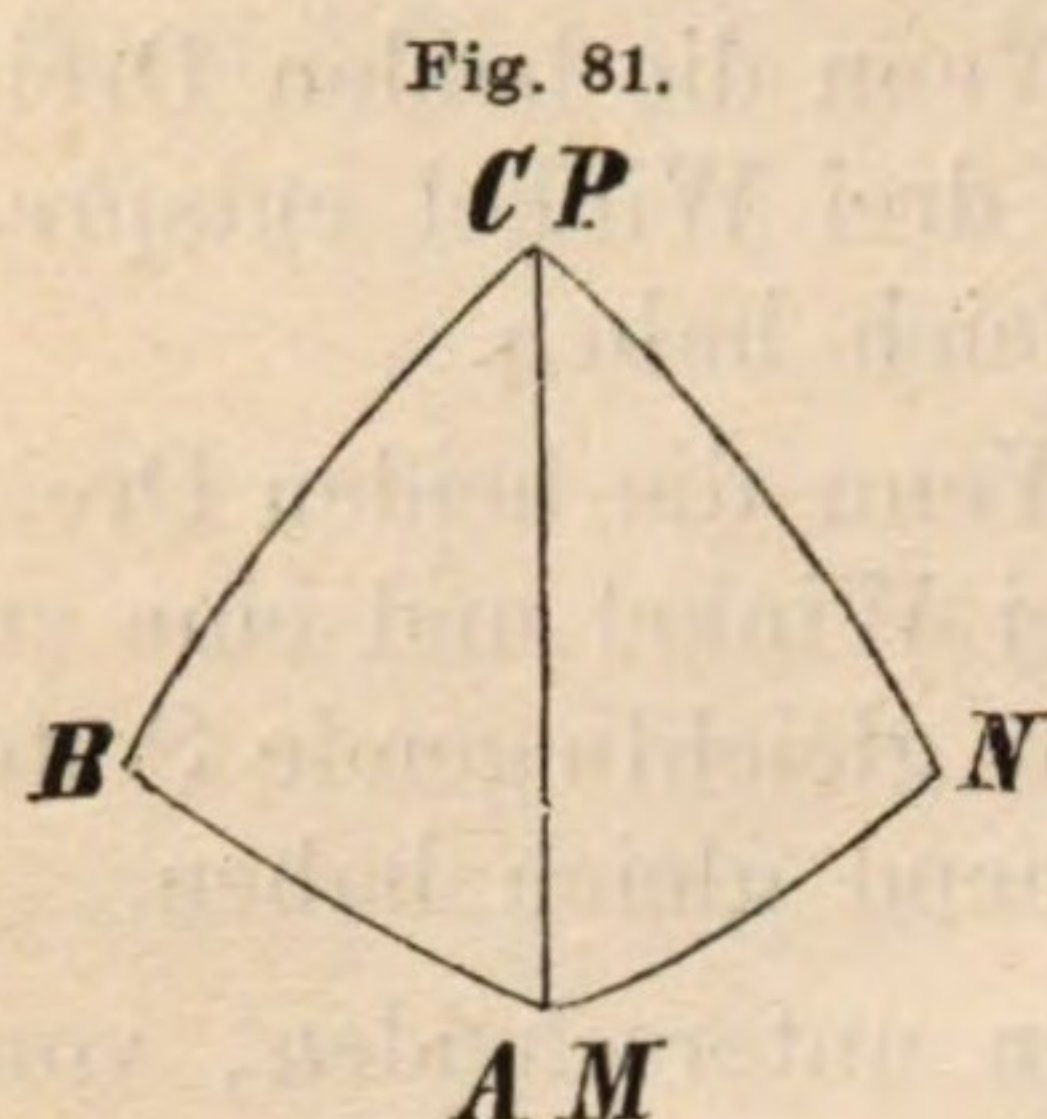
α) Wenn die beiden Dreiecke entsprechend gleiche Winkel haben, so haben die zugehörigen Polardreiecke entsprechend gleiche Seiten. Aus der Congruenz oder Symmetrie der Polardreiecke folgt die Congruenz oder Symmetrie der ursprünglichen.

b) Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1) Die Dreiecke haben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel entsprechend gleich. Wenn die Dreiecke gleichen Sinnes sind, so werden beim Aufeinanderlegen der gleichen Winkel auch die entsprechenden Schenkel zur Deckung kommen. Dann fallen die drei Eckpunkte paarweise zusammen und die Dreiecke decken sich. Wenn die Dreiecke verschiedenen Sinnes sind, so zeigt man ebenso, dass das eine Dreieck mit dem Gegendreieck des andern, mit welchem es gleichen Sinnes ist, zur Deckung gebracht werden kann.

2) Die Dreiecke haben zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen entsprechend gleich ($AB = MN$, $AC = MP$, $\sphericalangle B = \sphericalangle N$). In diesem Fall kann man nur dann auf die Congruenz oder Symmetrie schliessen, wenn die Gegenwinkel der andern gleichen Seiten nicht supplementär sind. Wenn die Dreiecke entgegen-

gesetzten Sinnes sind, so lege man dieselben mit denjenigen Seiten an einander, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, so dass zugleich die entsprechenden Endpunkte auf ein-



ander fallen. Hierdurch entsteht mit Ausnahme eines besonderen Falles der in der Anmerkung besprochen ist, ein Viereck (Fig. 81), welches nach den Voraussetzungen $AB = MN$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle N$ ein Deltoid sein muss (§ 78b). Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass eines der Dreiecke das Gegendreieck des andern deckt (§ 78a, Anm.). Sind dagegen die Dreiecke ABC und MNP gleichen Sinnes, so ist ABC mit dem Gegendreieck $M'N'P'$

entgegengesetzten Sinnes. ABC deckt daher nach dem Vorgehenden das Gegendreieck von $M'N'P'$ oder das Dreieck MNP , was zu beweisen war.

Anmerkung. Es bleibt noch der Fall zu erörtern, wo die Winkel bei A und M , über welche nichts vorausgesetzt ist, supplementär sind, und daher die Figur 81 kein Viereck, sondern ein Dreieck darstellt, welches gleichschenkelig ist, weil es zwei gleiche Winkel an der Grundlinie hat. Die gemeinsame Seite der an einander gelegten Dreiecke verbindet die Spitze mit der Mitte der Grundlinie, woraus wieder folgt, dass die Dreiecke ABC und MNP symmetrisch entsprechend sind.

β) Die beiden Fälle, wo die Dreiecke zwei Winkel und die eingeschlossene Seite oder zwei Winkel und die Gegenseite der einen entsprechend gleich haben, führt man durch die Betrachtung der Polardreiecke auf β) zurück, wie dies bei α) geschehen ist. In dem letzten Falle kann man aber nur auf Congruenz oder Symmetrie schliessen, wenn die zum zweiten Paare gleicher Winkel gehörigen Gegenseiten nicht supplementär sind.

§ 80. Das sphärische Parallelogramm.

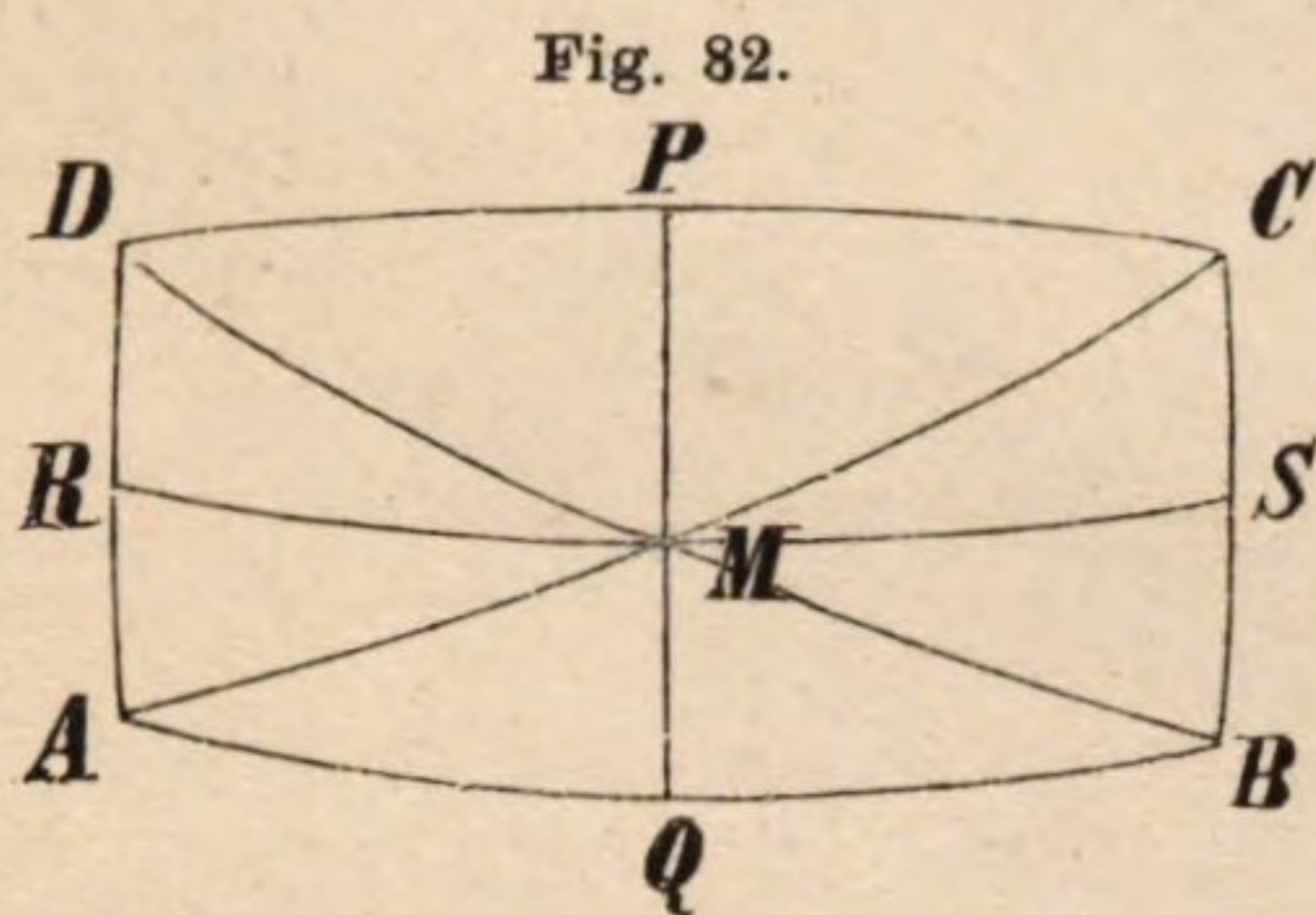
Zwei Paare von Hauptkreisen bilden ein „sphärisches Parallelogramm“, wenn die Kreise eines jeden Paares von demselben Punkte M gleichgrosse und entgegengesetzt gerichtete sphärische Abstände haben.

a) Jede Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente sphärische Dreiecke gleichen Sinnes.

Die Diagonalen halbiren einander in dem Punkte M , welcher das sphärische Centrum des Parallelogramms heisst.

Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms schneiden sich auf der Polaren von M .

Beweis. Man lasse die Figur um den Punkt M eine Drehung von 180° beschreiben. Dann kommen die Bogen MQ



und MR bezüglich in die frühere Lage der Bogen MP und MS .

Ferner fallen die Hauptkreise AB und AD auf die frühere Lage der Hauptkreise CD und CB , und zwar decken sich dabei die Drehungsrichtungen AB und CD , sowie die Drehungsrichtungen AD und CB . Dabei fällt der Punkt A auf die frühere

Lage von C und nicht etwa auf dessen Gegenpunkt C' , denn der durch die Drehungsrichtungen CD und CB an dem Gegenpunkt C' bestimmte Winkel schliesst den Punkt M nicht in das zugehörige Zweieck ein. Ebenso fällt Punkt C auf die frühere Lage des Punktes A und in derselben Weise decken sich die Punkte D , B wechselseitig. Hierdurch sind aber die Dreiecke ABC und CDA zur Deckung gekommen, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Ferner sind die Bogen MA und MC zur Deckung gekommen, folglich waren sie vor der Drehung ebenfalls gleiche Bogen von entgegengesetzter Drehungsrichtung auf demselben Hauptkreise, d. h. M ist die Mitte der Diagonalen AC . Ebenso zeigt man, dass M die Mitte der Diagonalen BD ist. Da die Gegenseiten AB und CD auf dem Hauptkreise PQ senkrecht stehen, so schneiden sie sich in den Polen dieses Hauptkreises. Diese Pole liegen aber auf der Polaren von M , weil der Hauptkreis PQ durch M geht.

Erklärung. Eine Figur, welche mit ihrer ersten Lage zur Deckung kommt, wenn man sie um einen Punkt M eine Drehung von 180° beschreiben lässt, heisst centrisch symmetrisch. Zwei Punkte oder zwei Hauptkreise, welche dabei wechselseitig zur Deckung gelangen, heissen entsprechende Elemente. Zwei Dreiecke, wie ABC und CDA in Fig. 82, welche nach dieser Drehung auf einander fallen, heissen entsprechende Dreiecke.

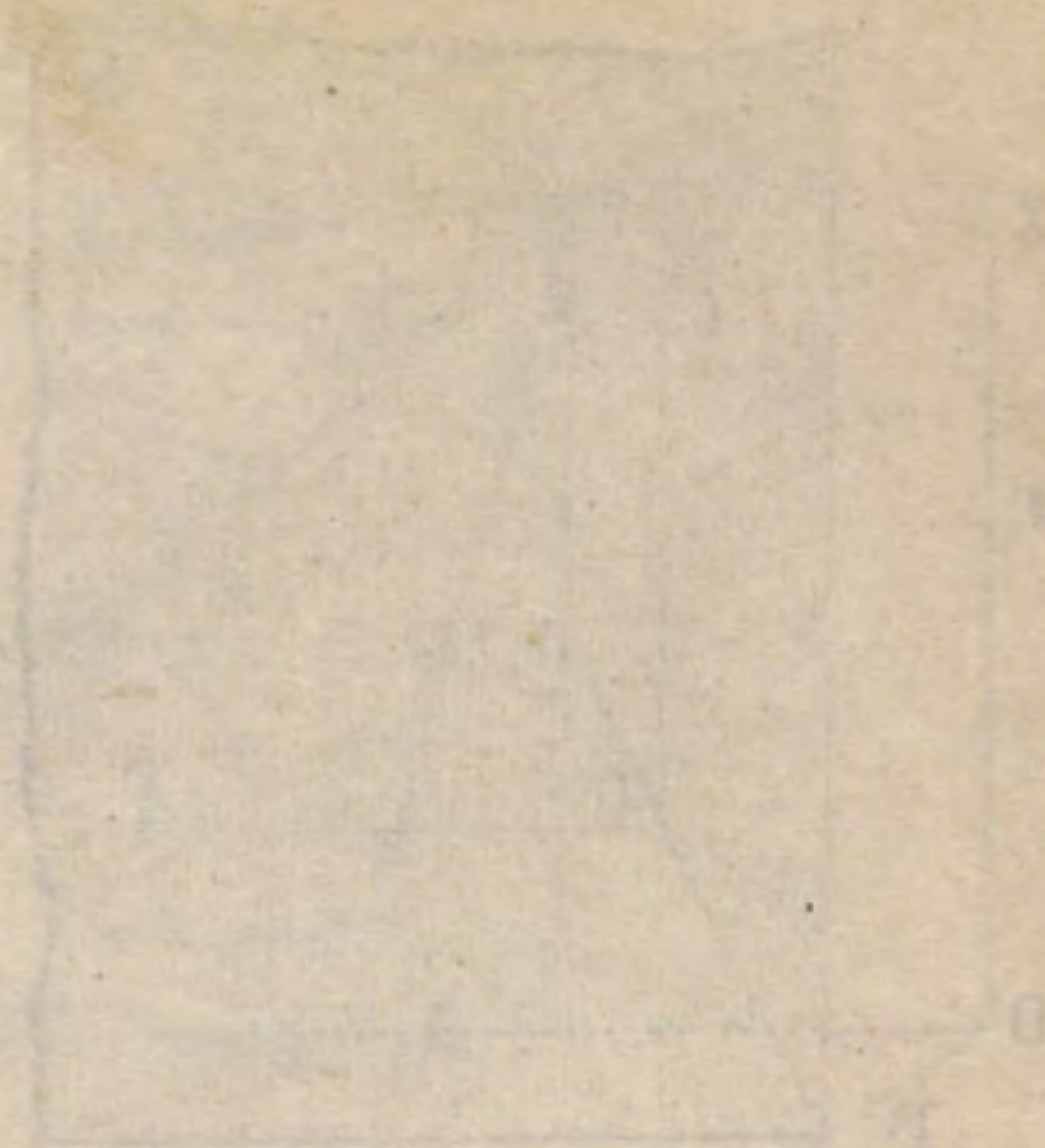
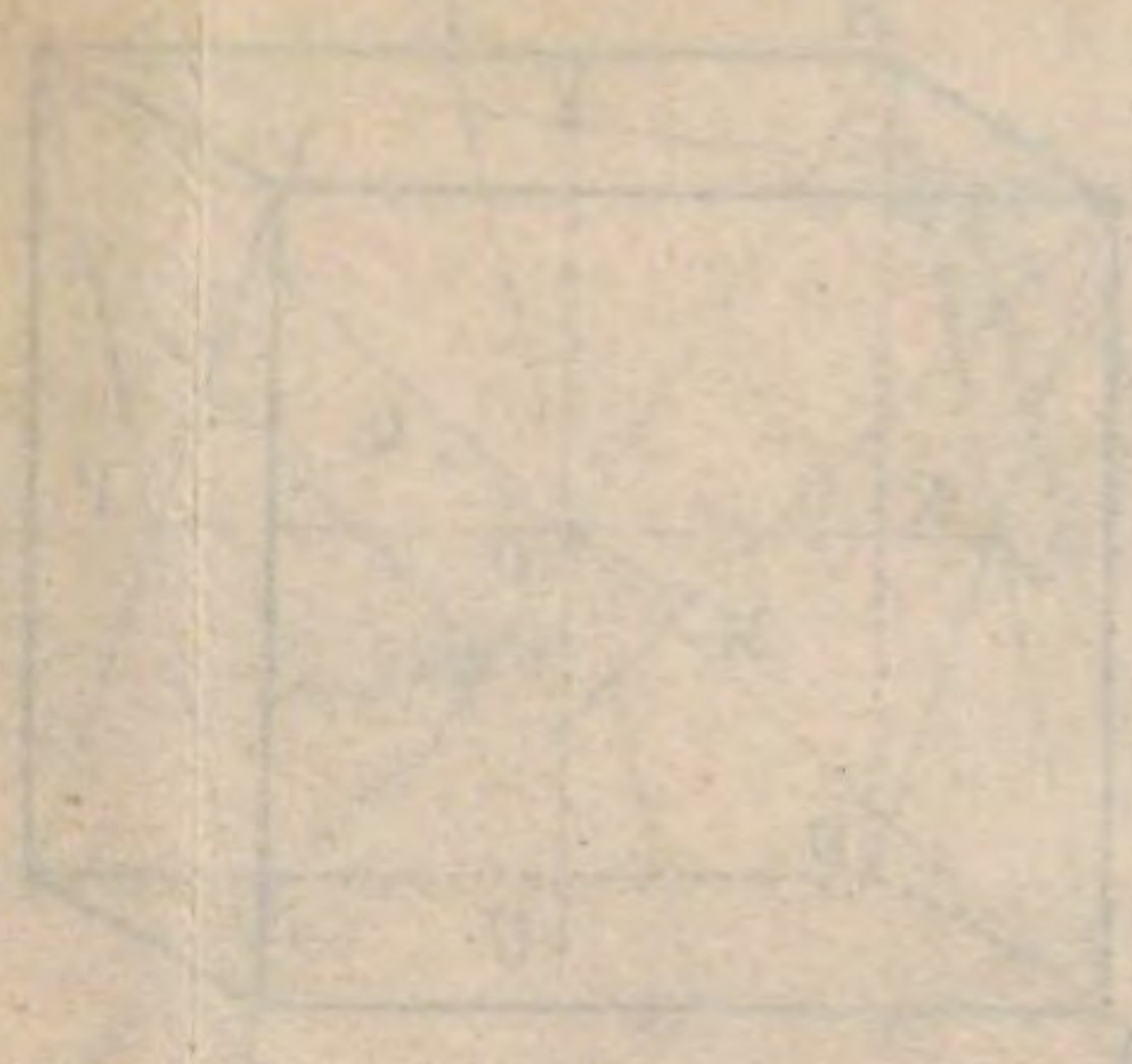


Fig. 7

Fig. 8

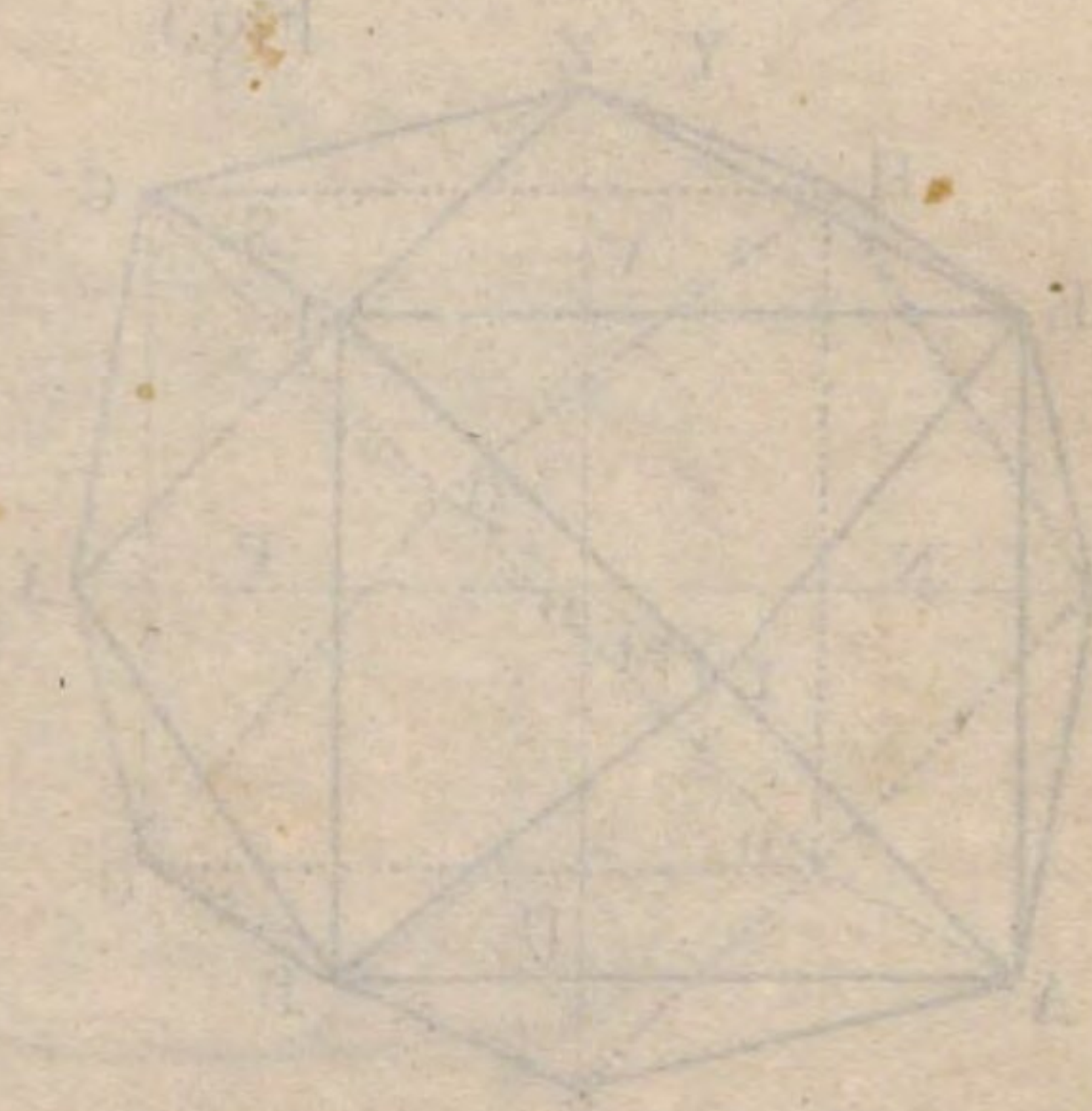
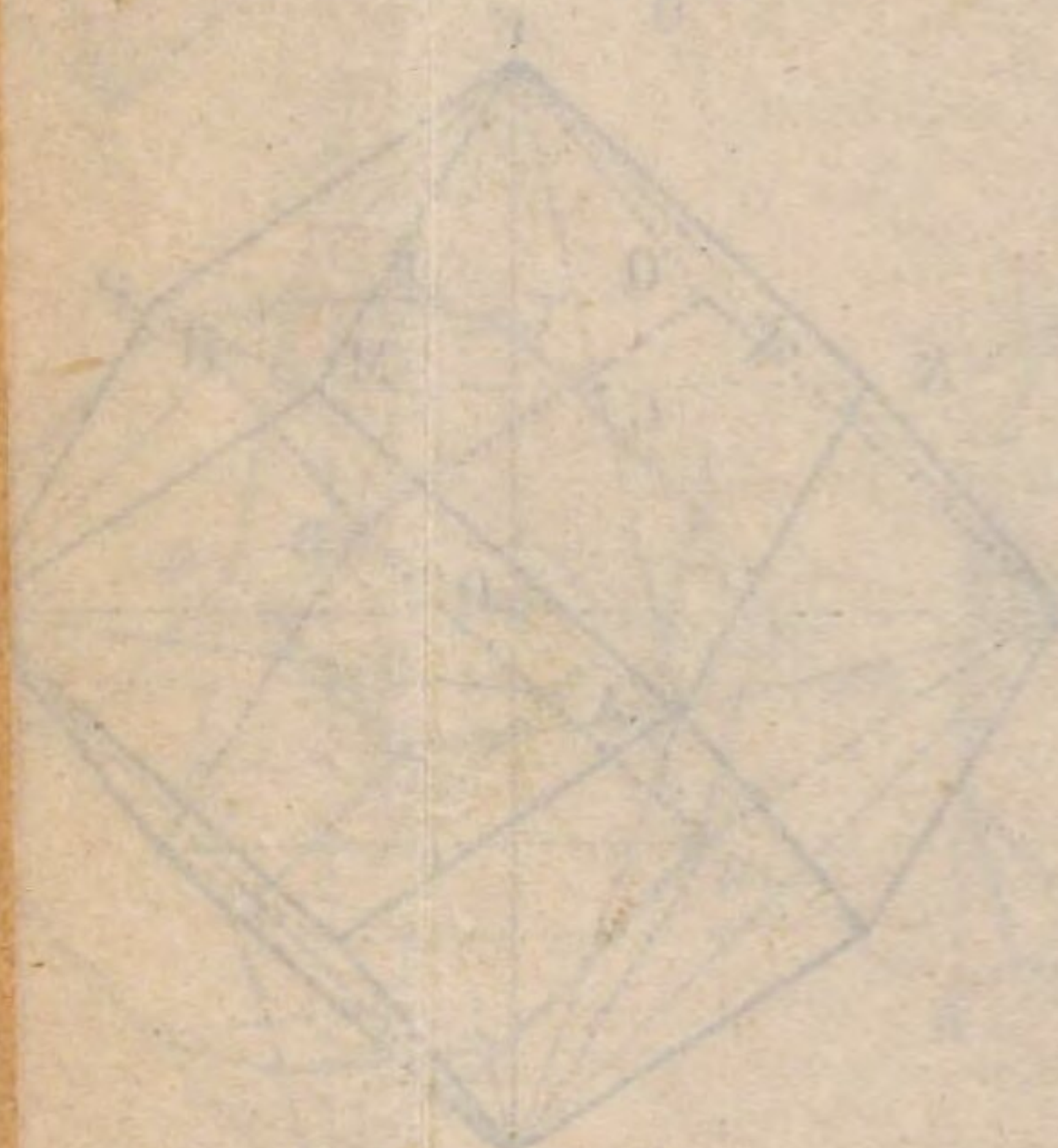


Fig. 9

Fig. 10

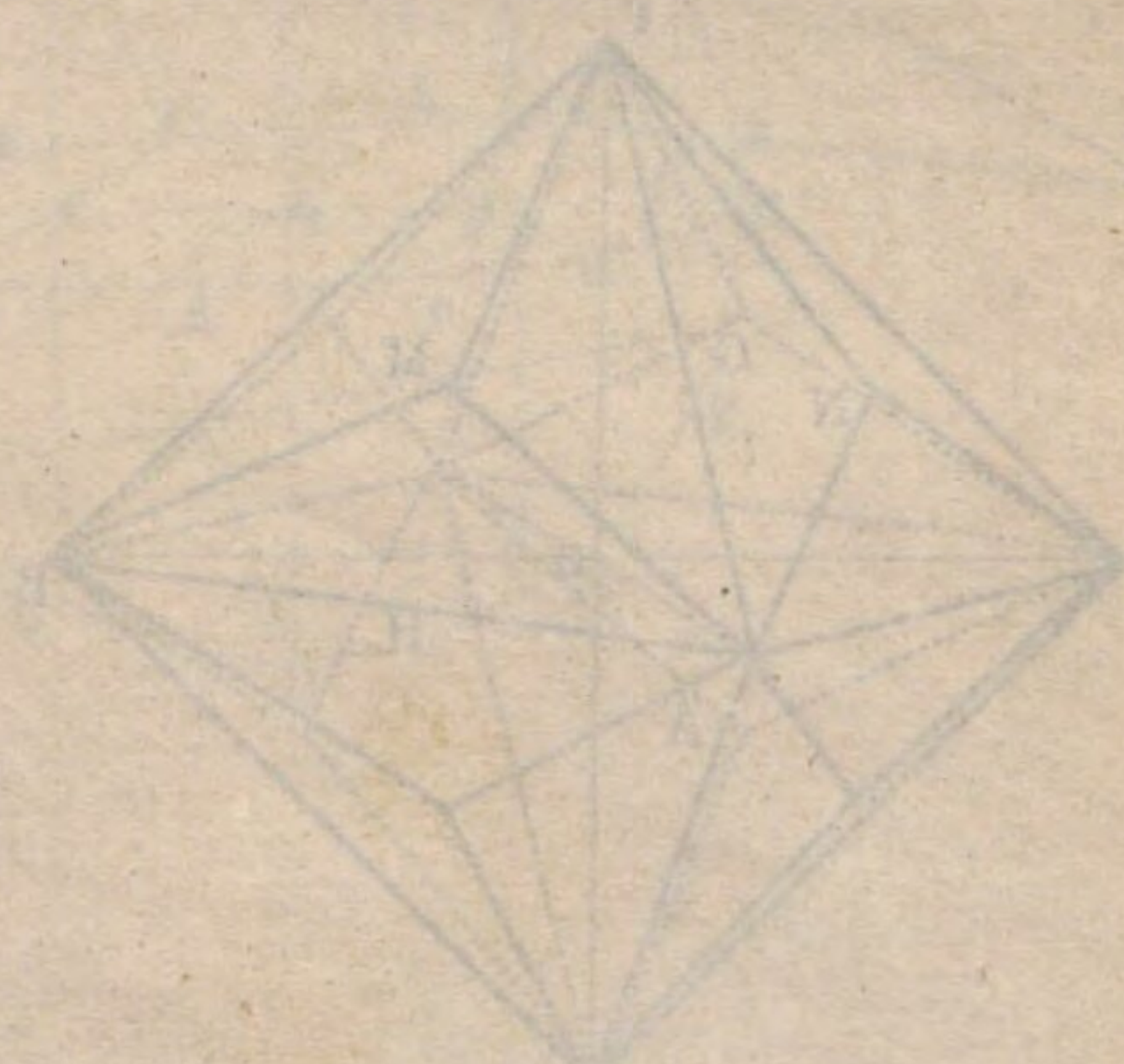


Fig.1.

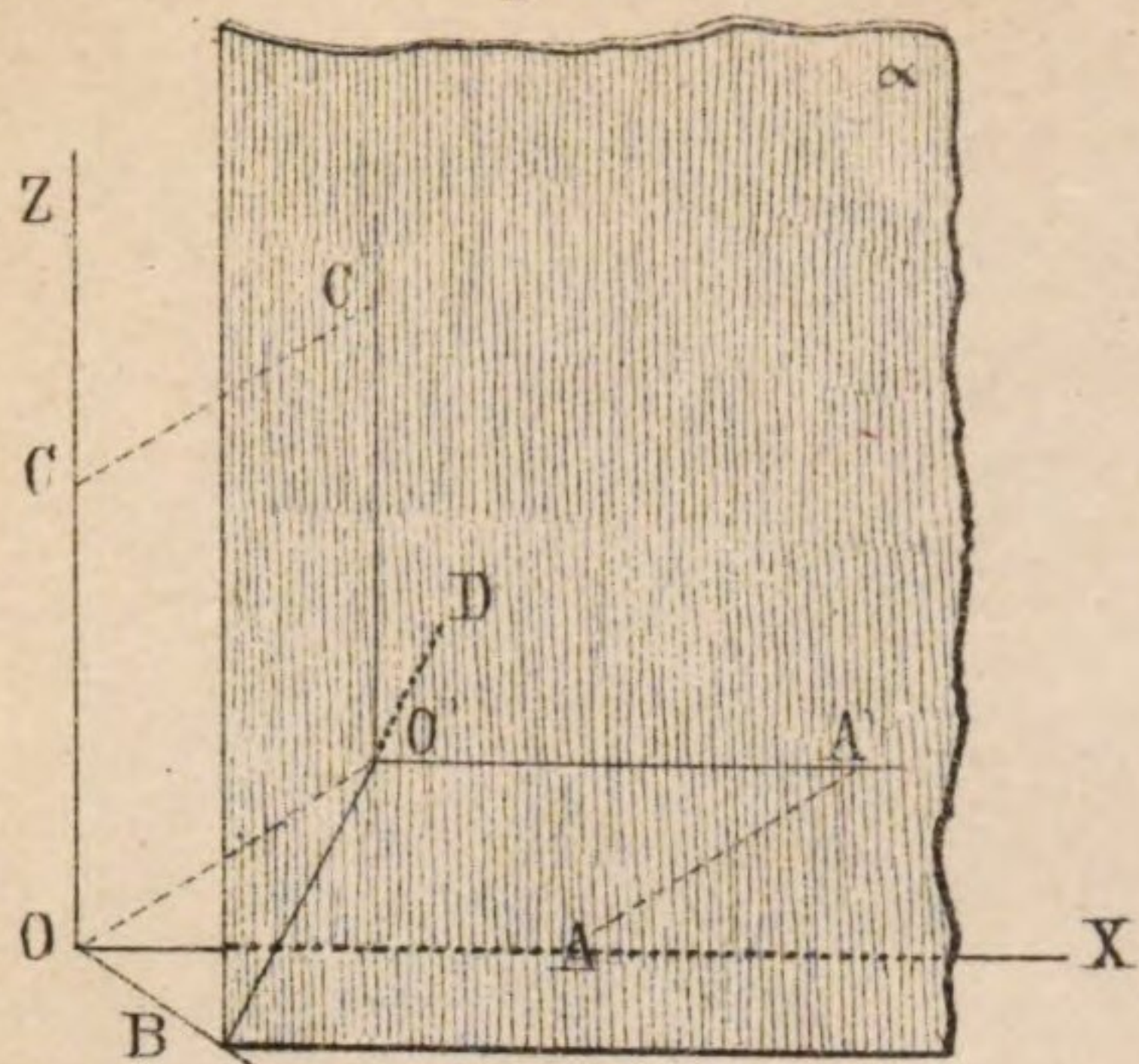


Fig.2.

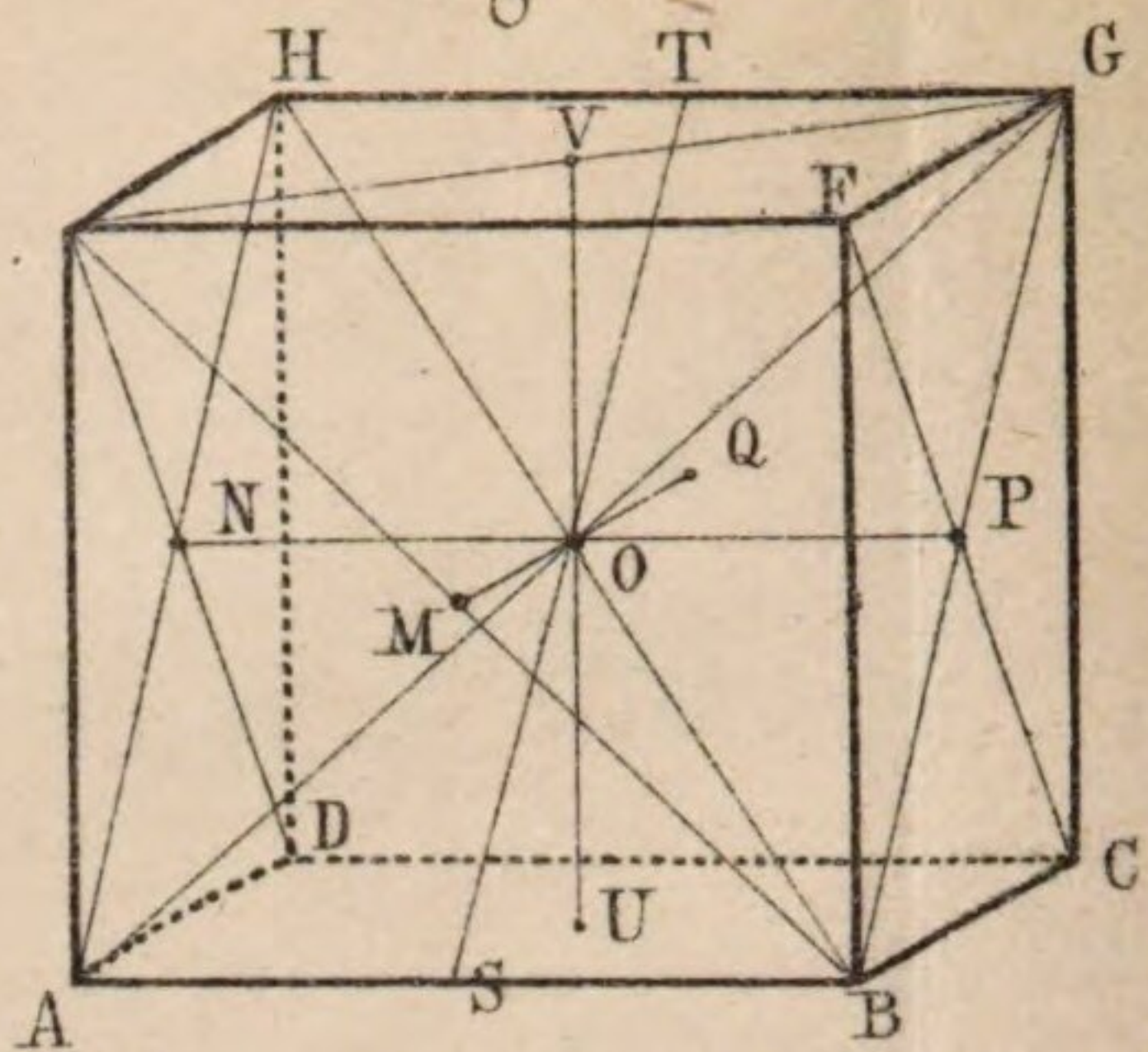


Fig.5.

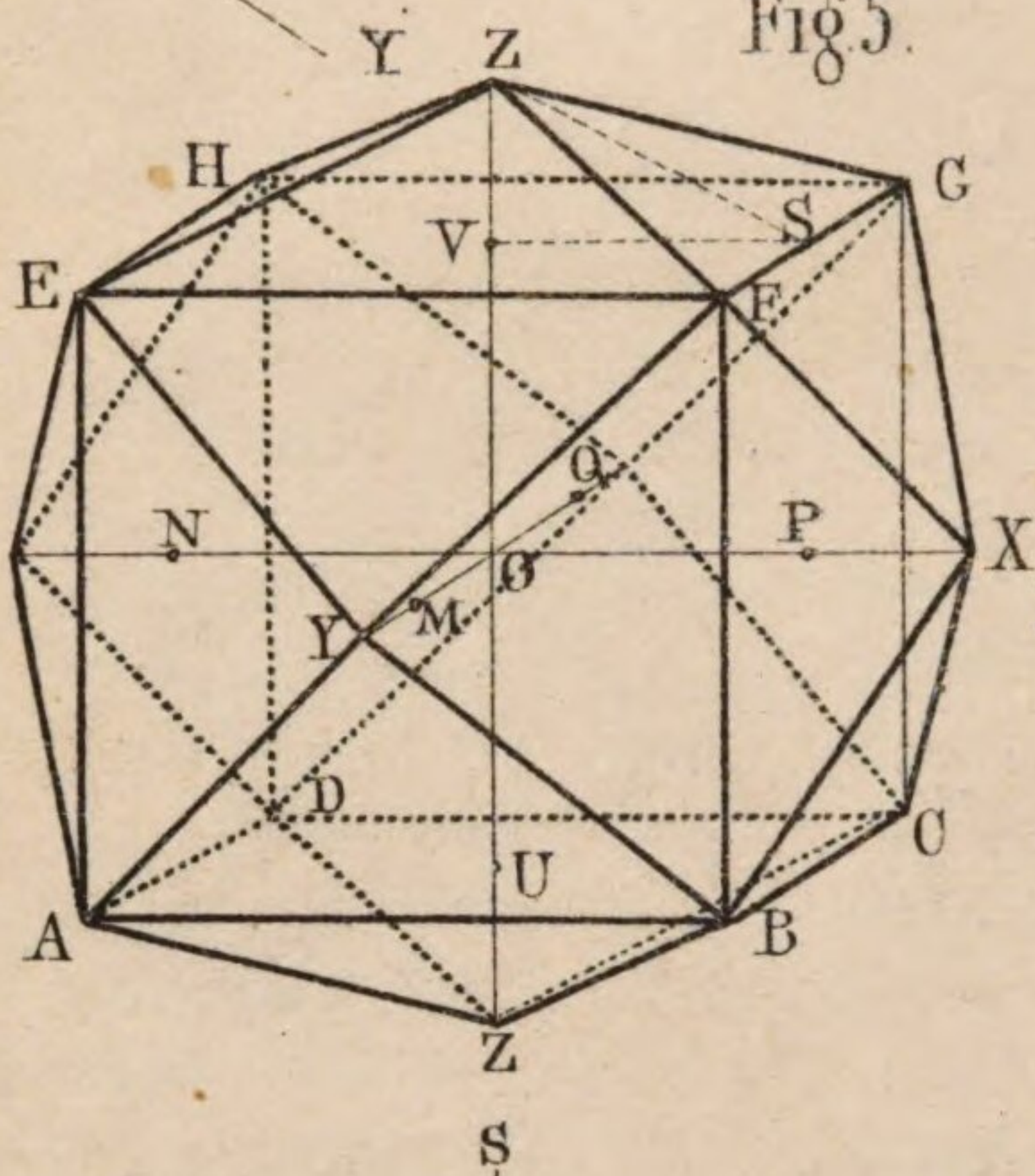


Fig.7.

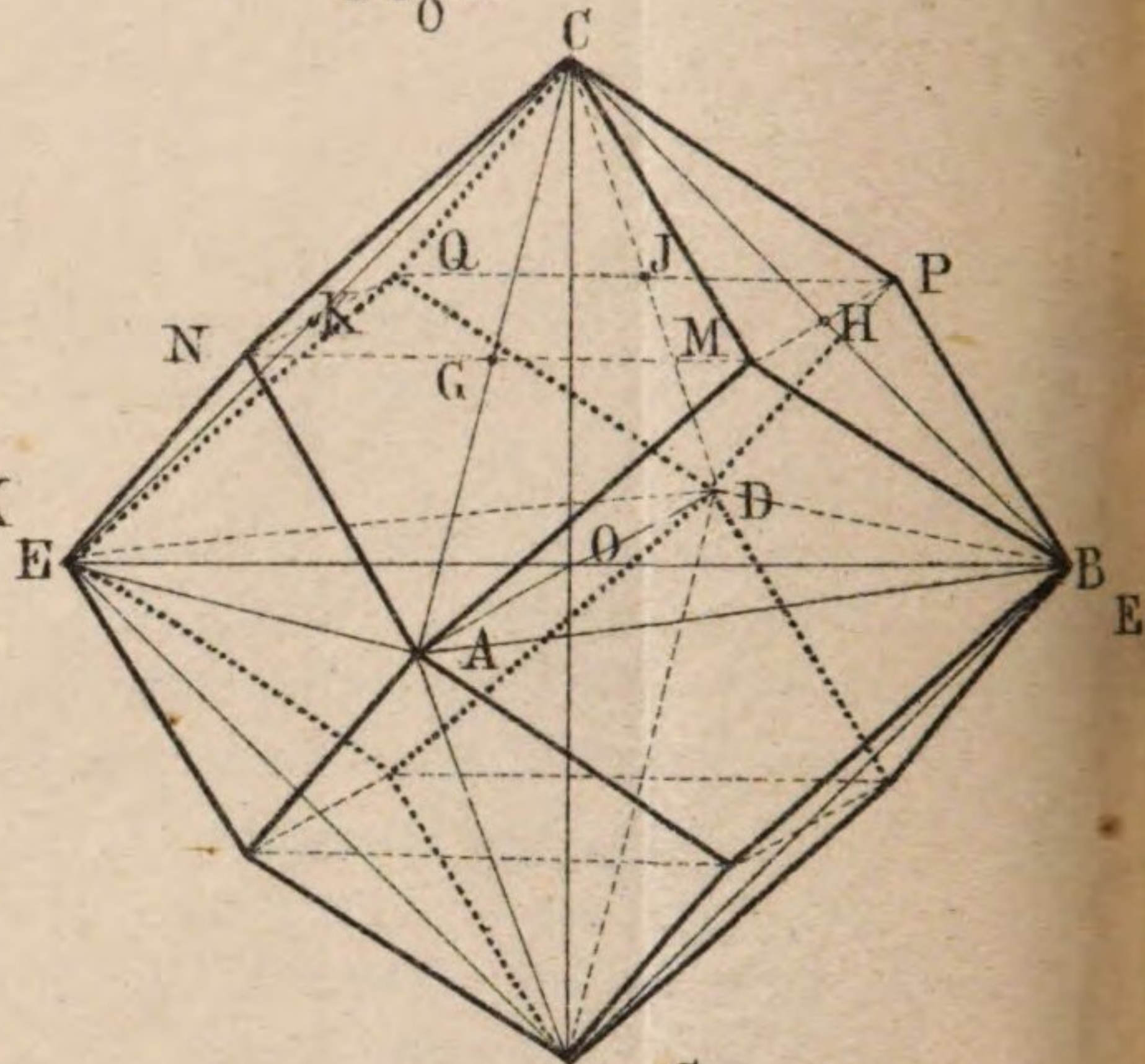


Fig.6.

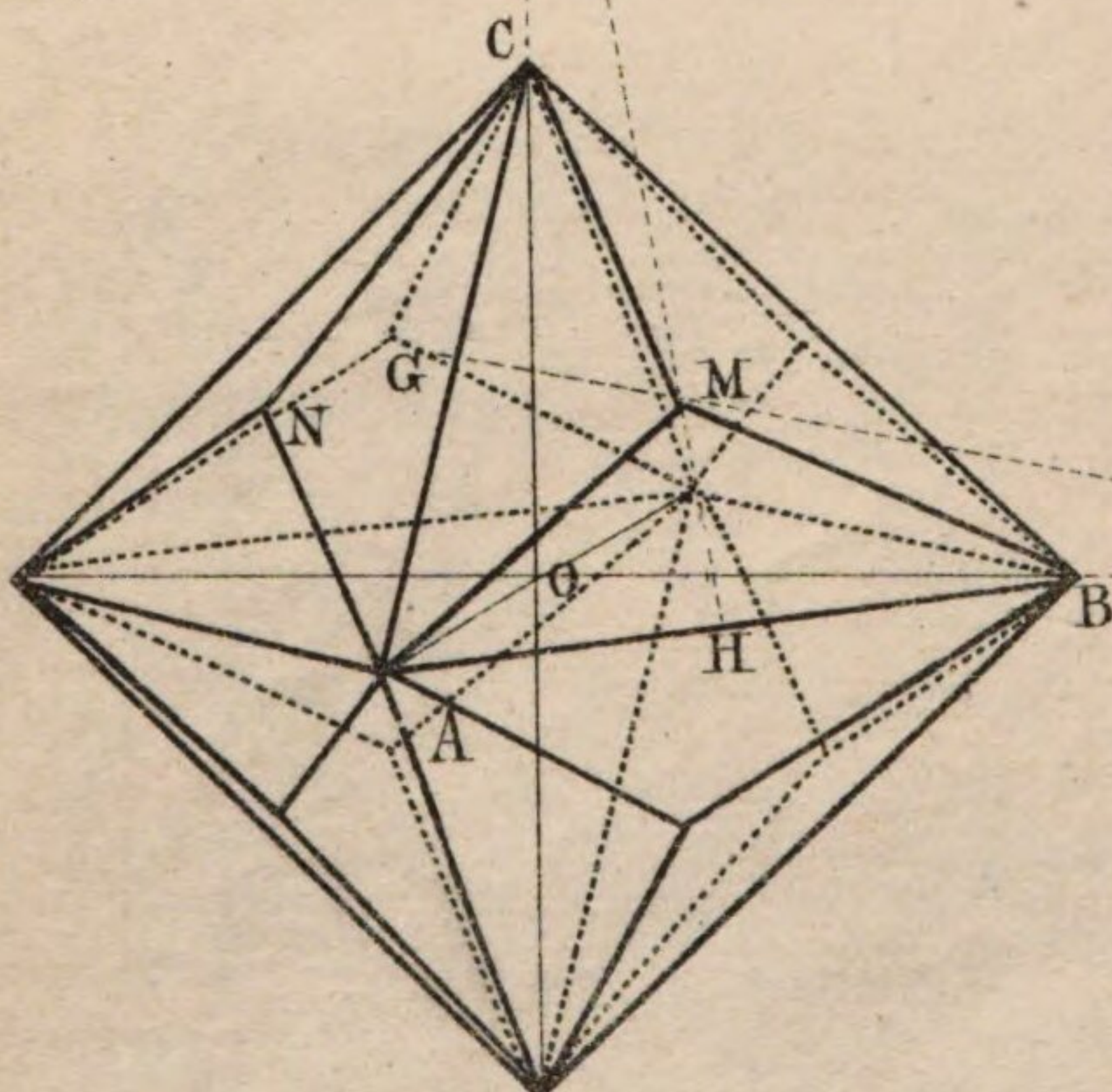


Fig.10.

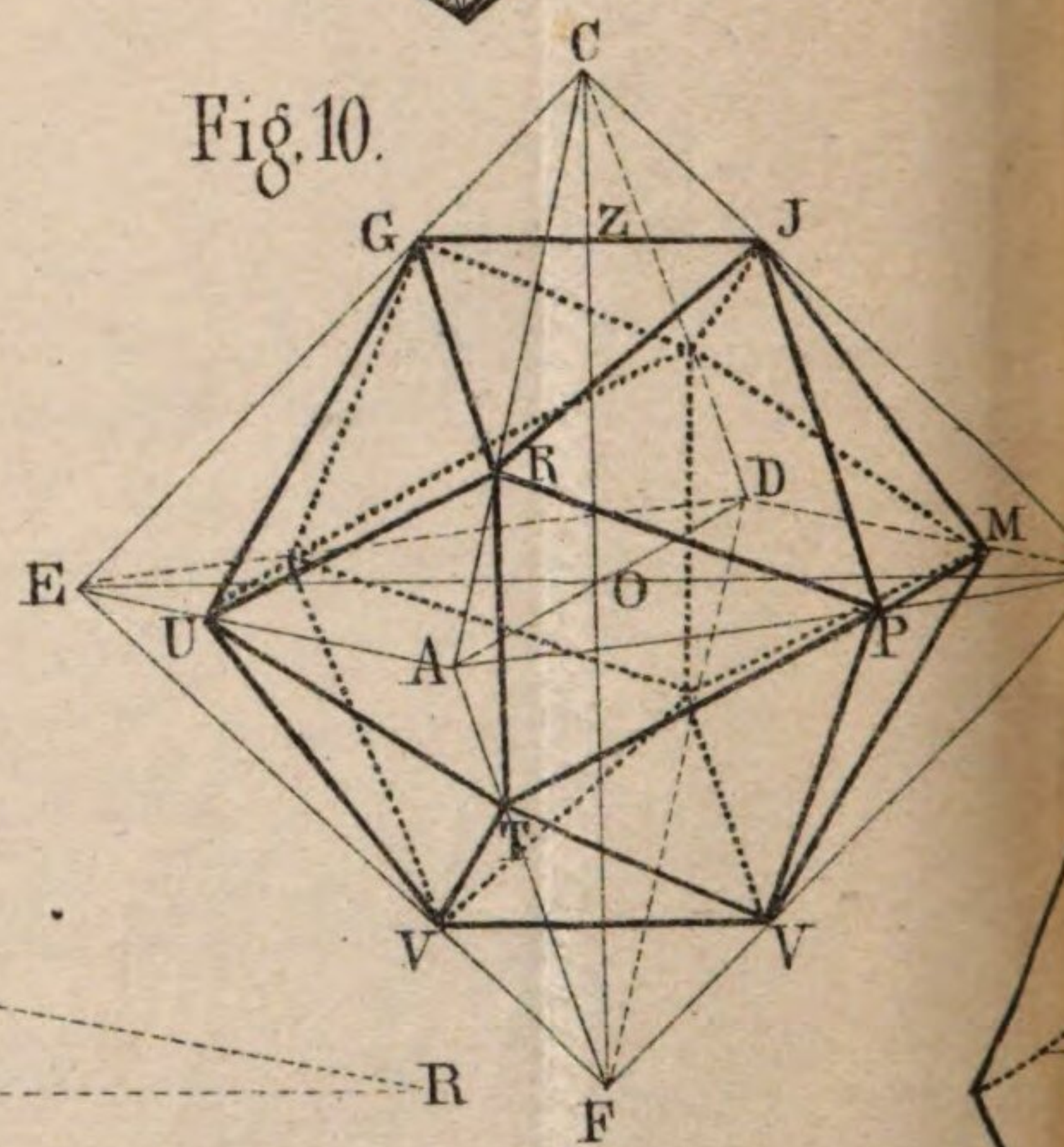


Fig. 3.

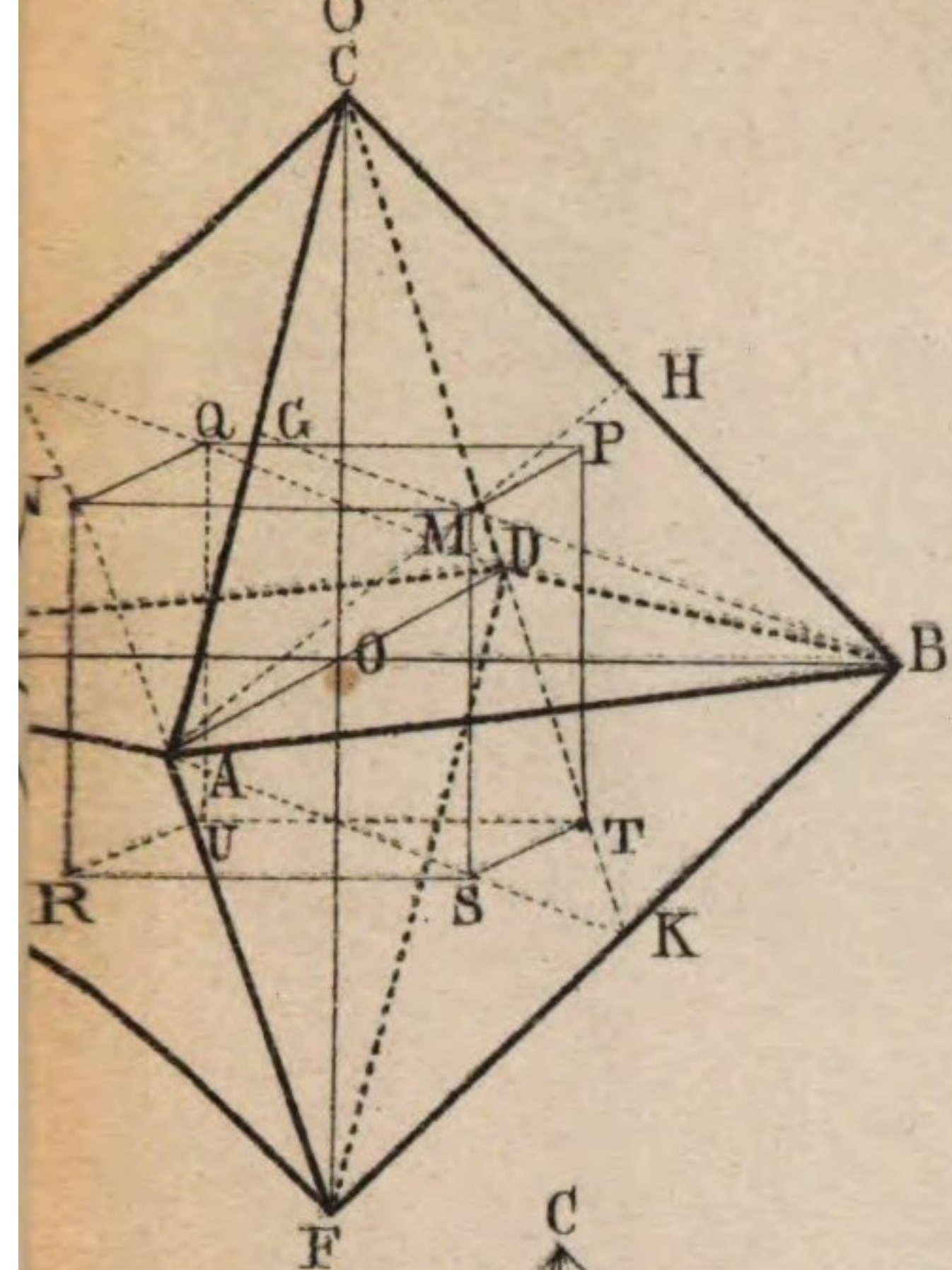


Fig. 4.

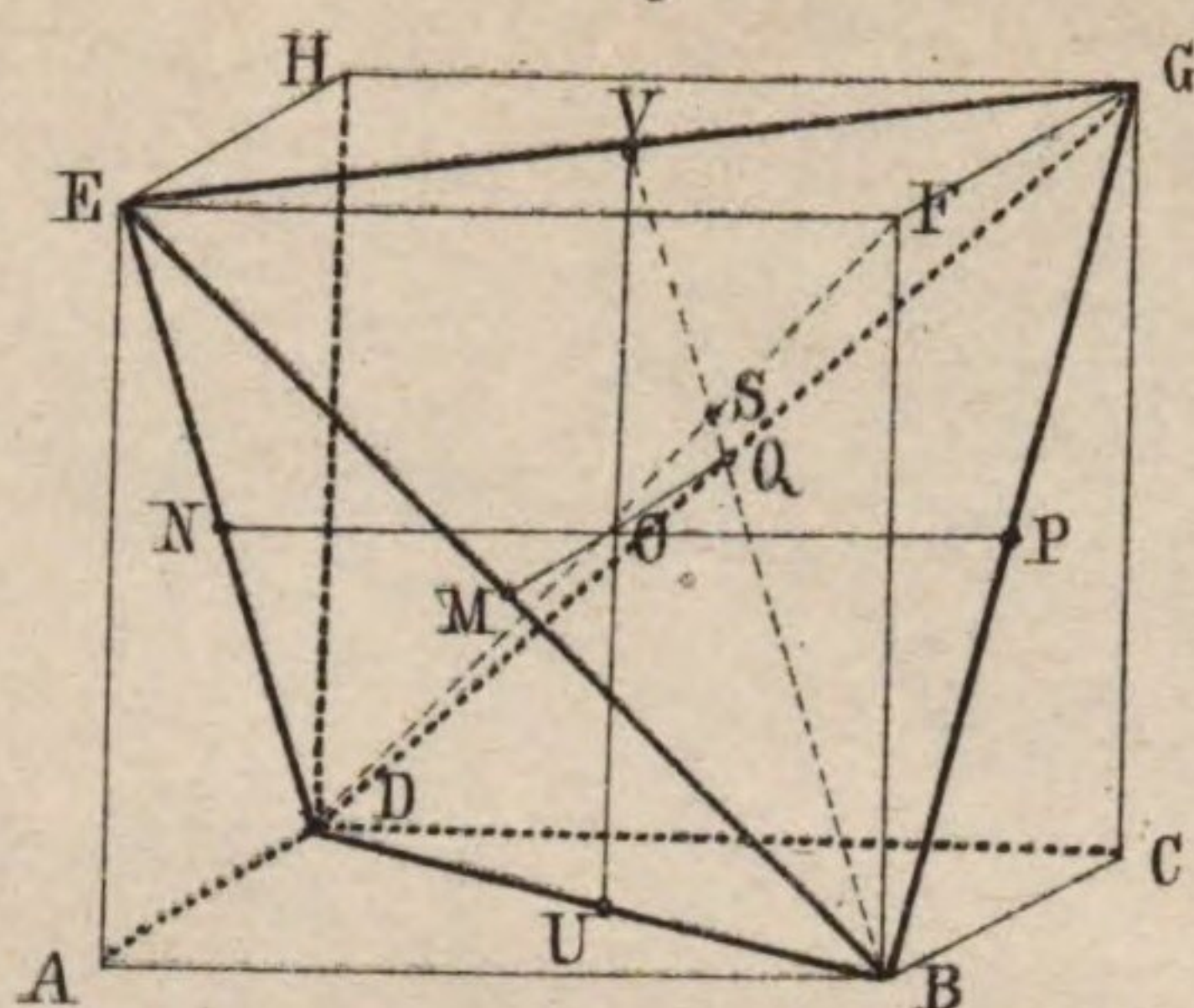


Fig. 9.

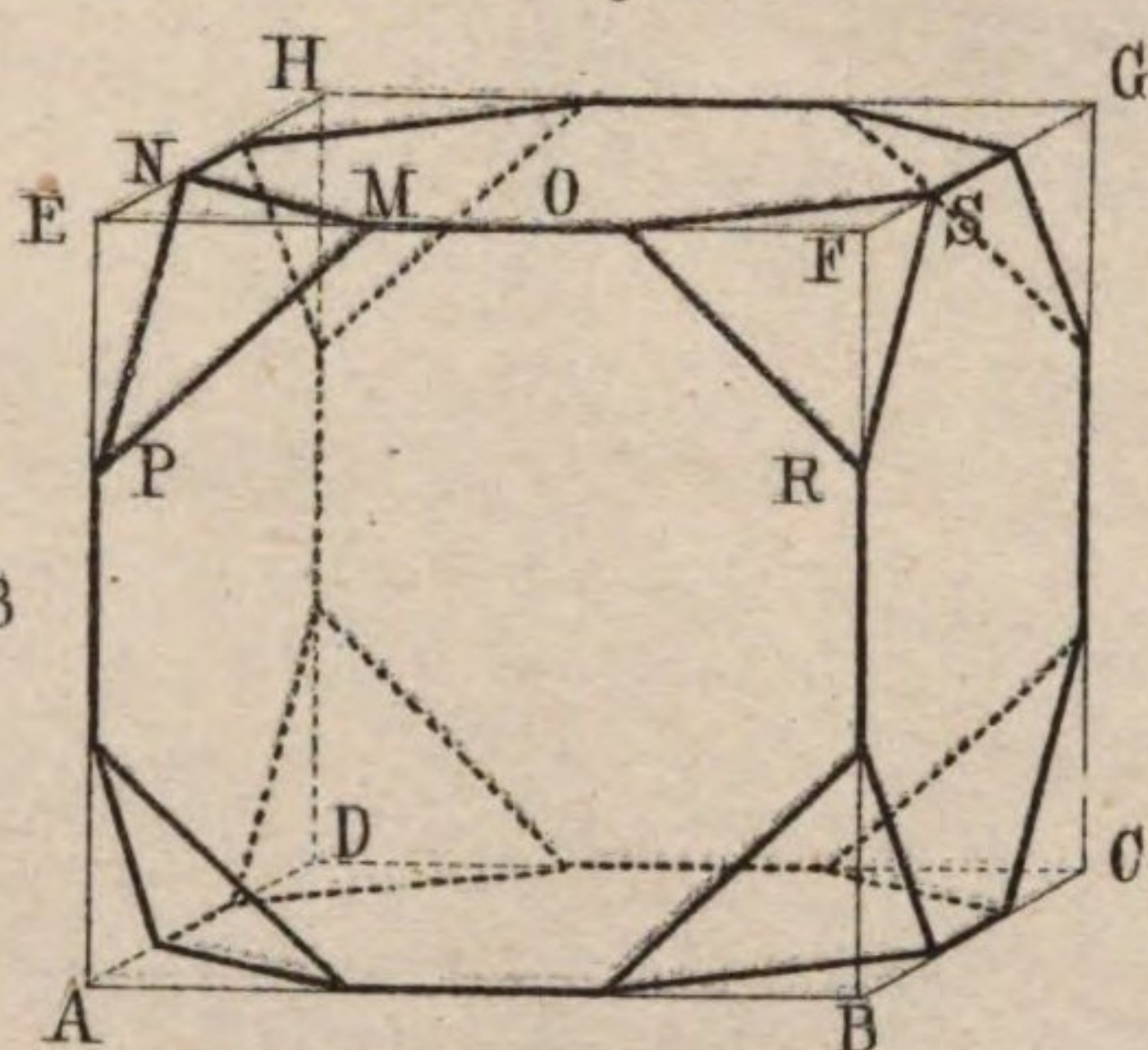


Fig. 12.

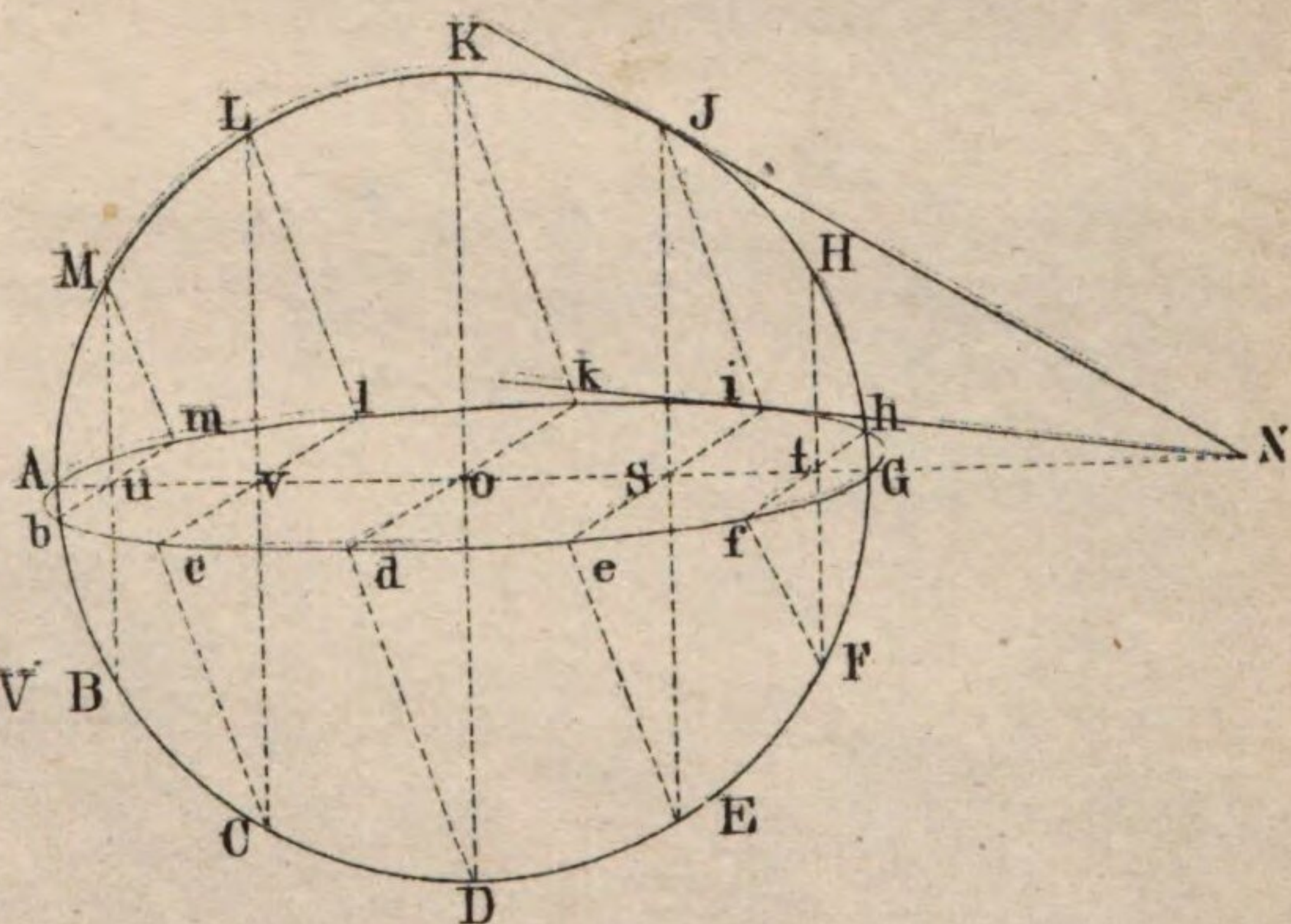


Fig. 11.

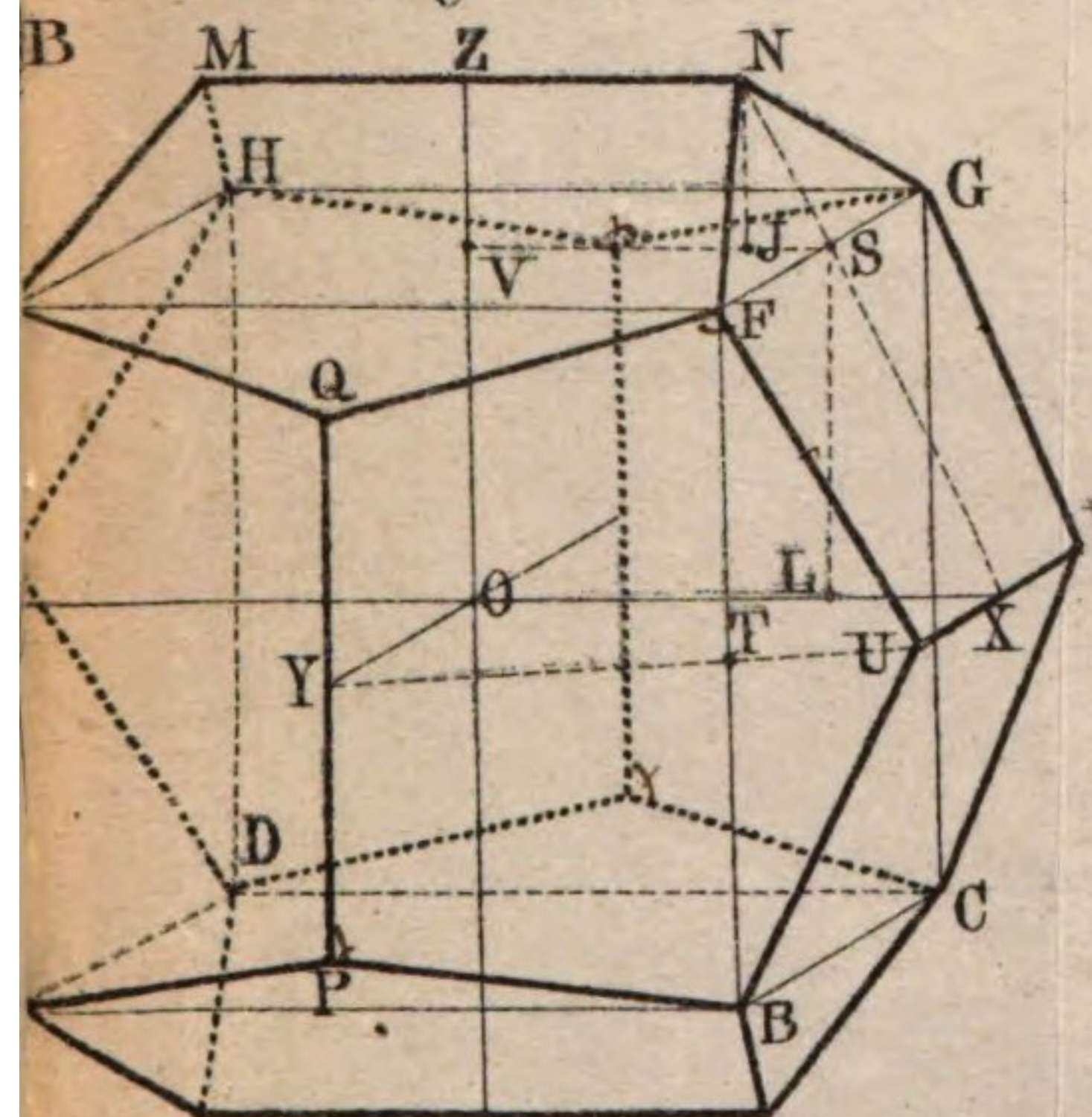


Fig. 1



Fig. 2

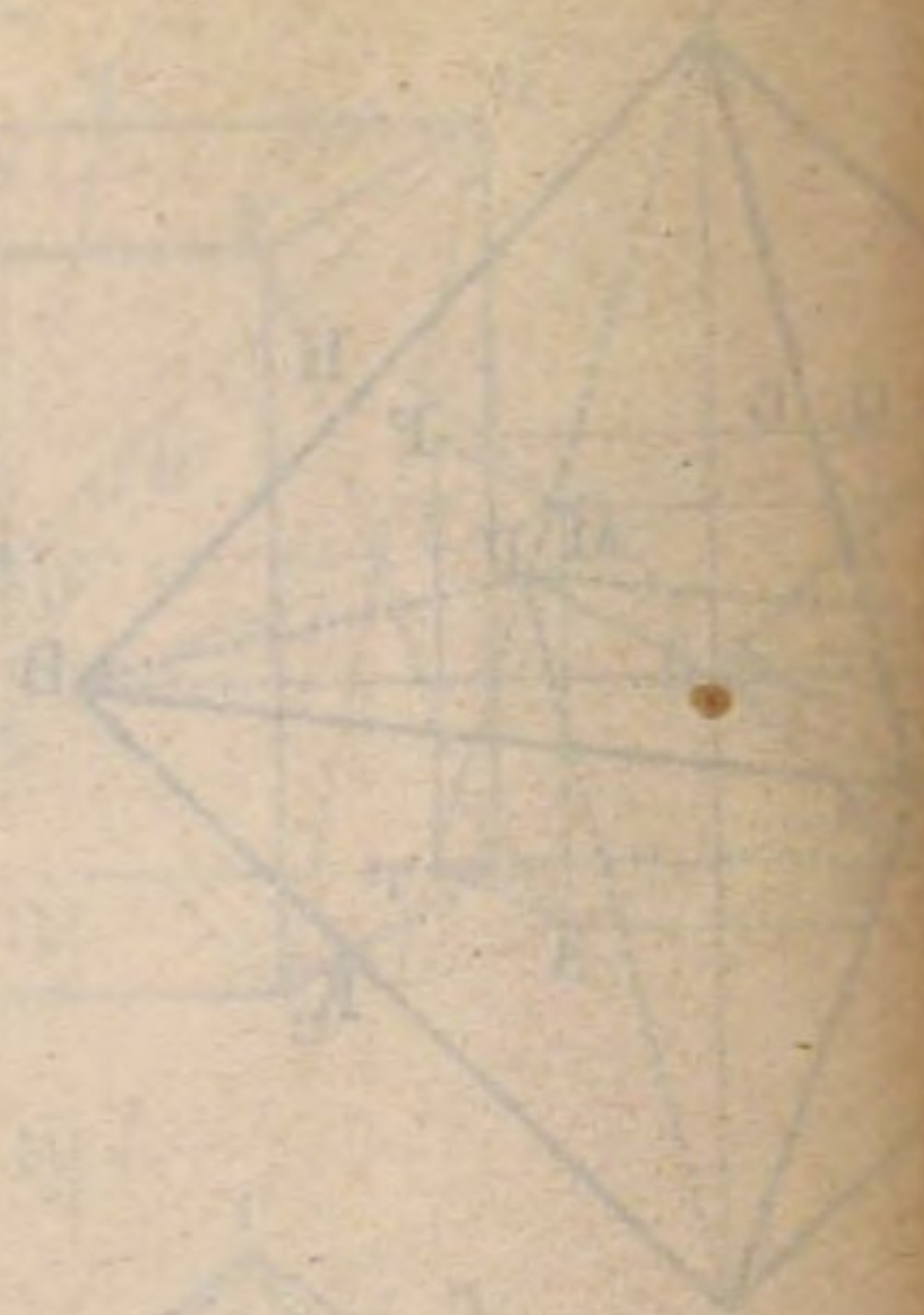


Fig. 3

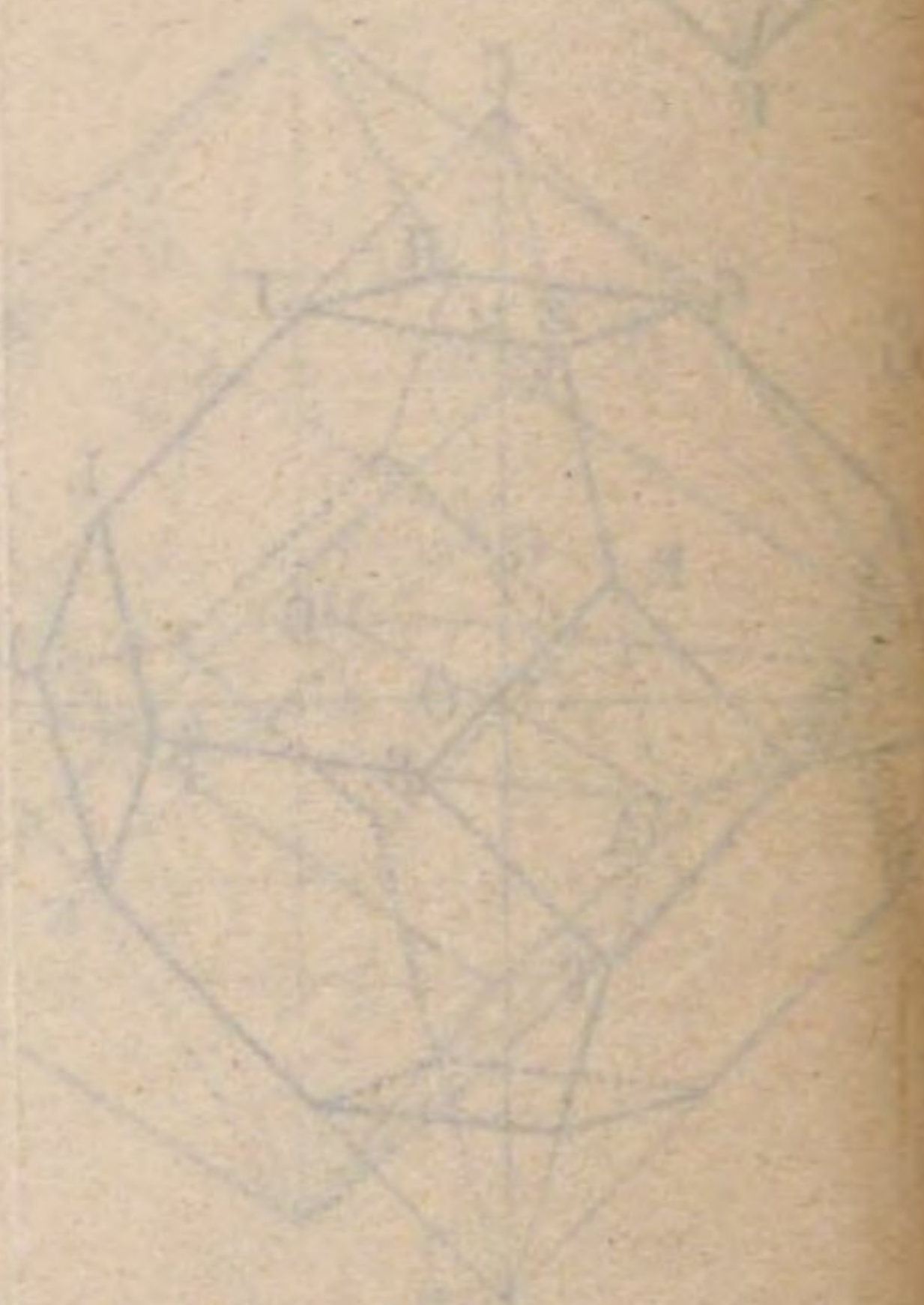
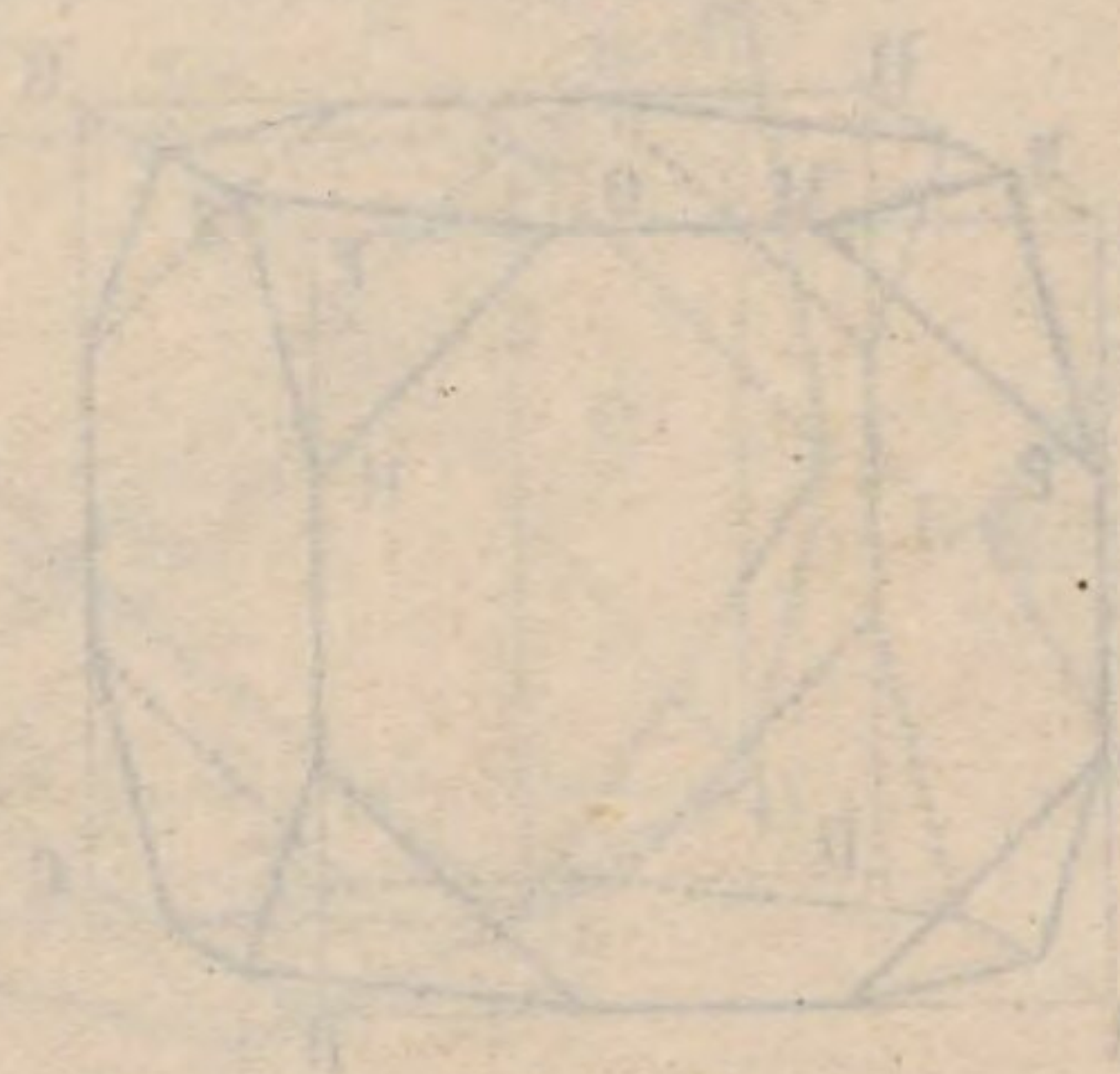


Fig. 4

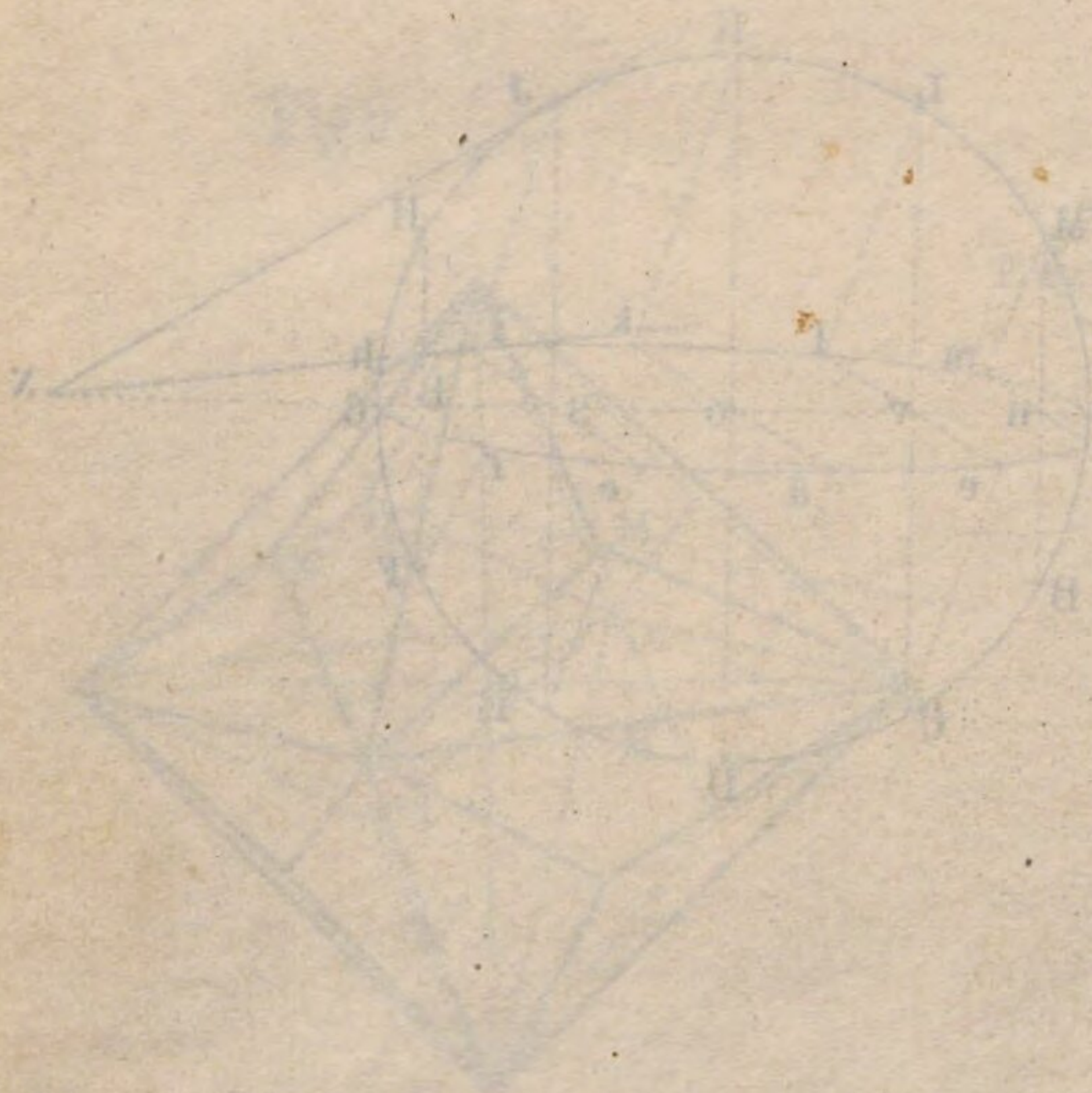
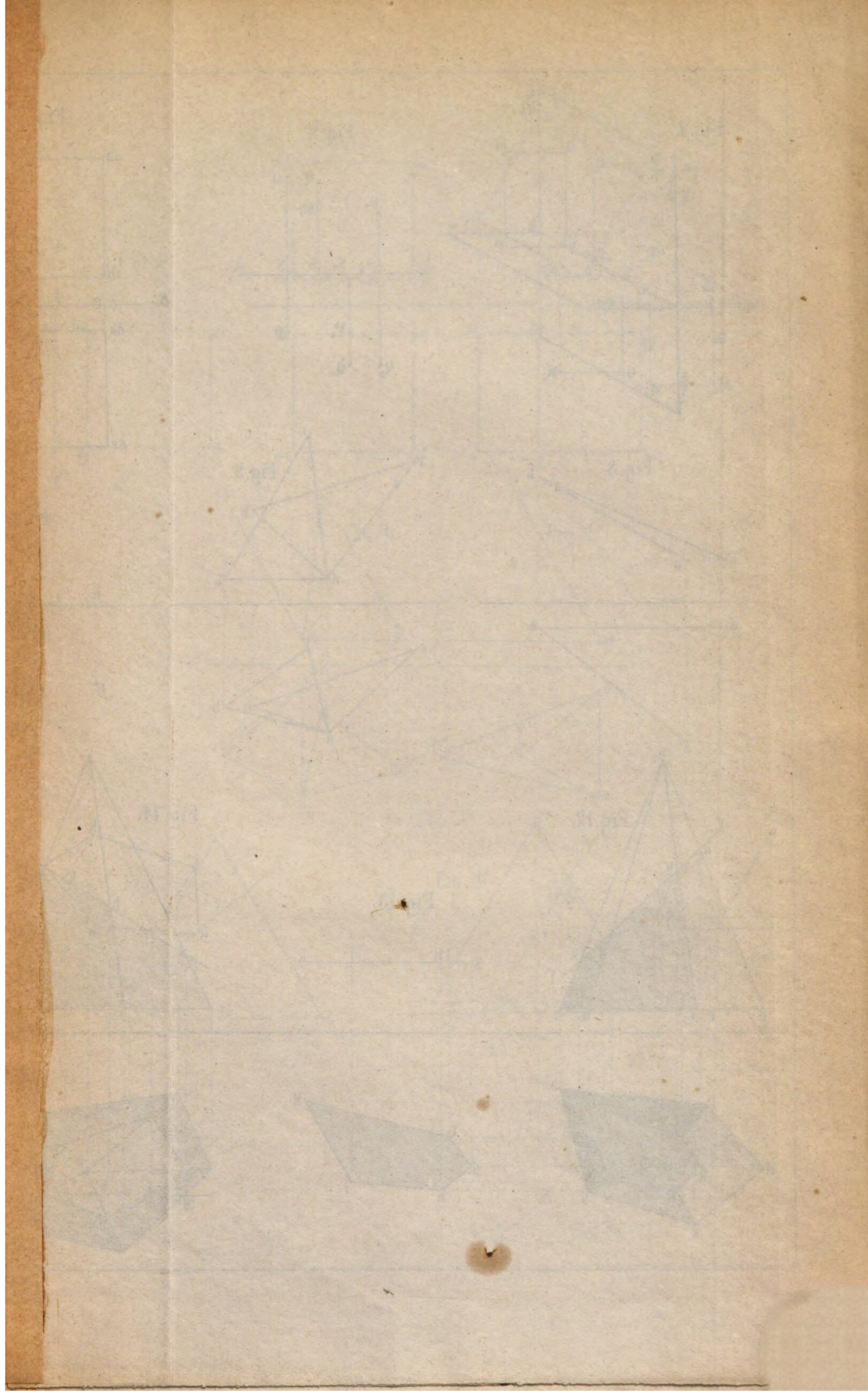
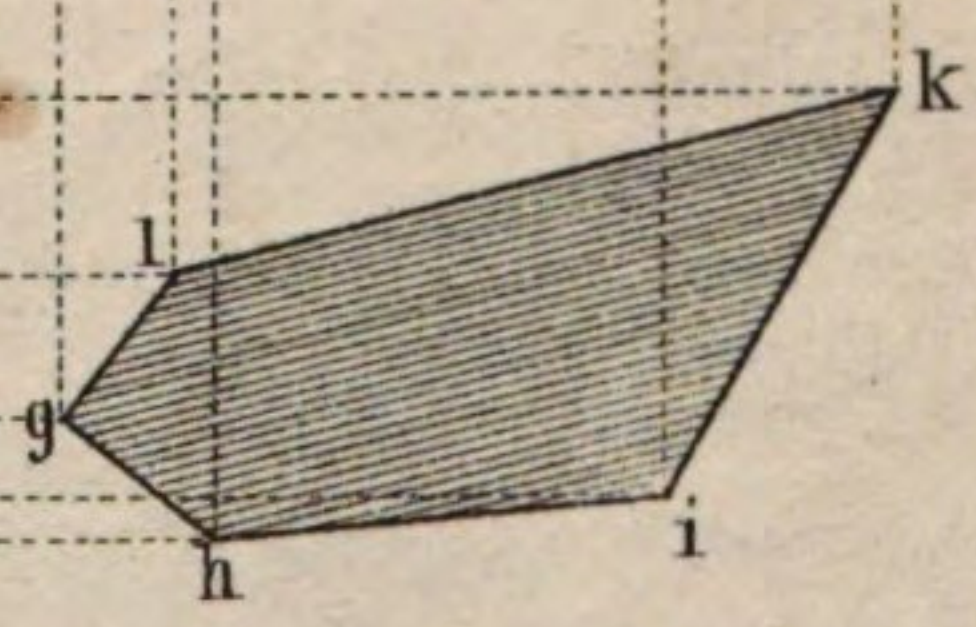
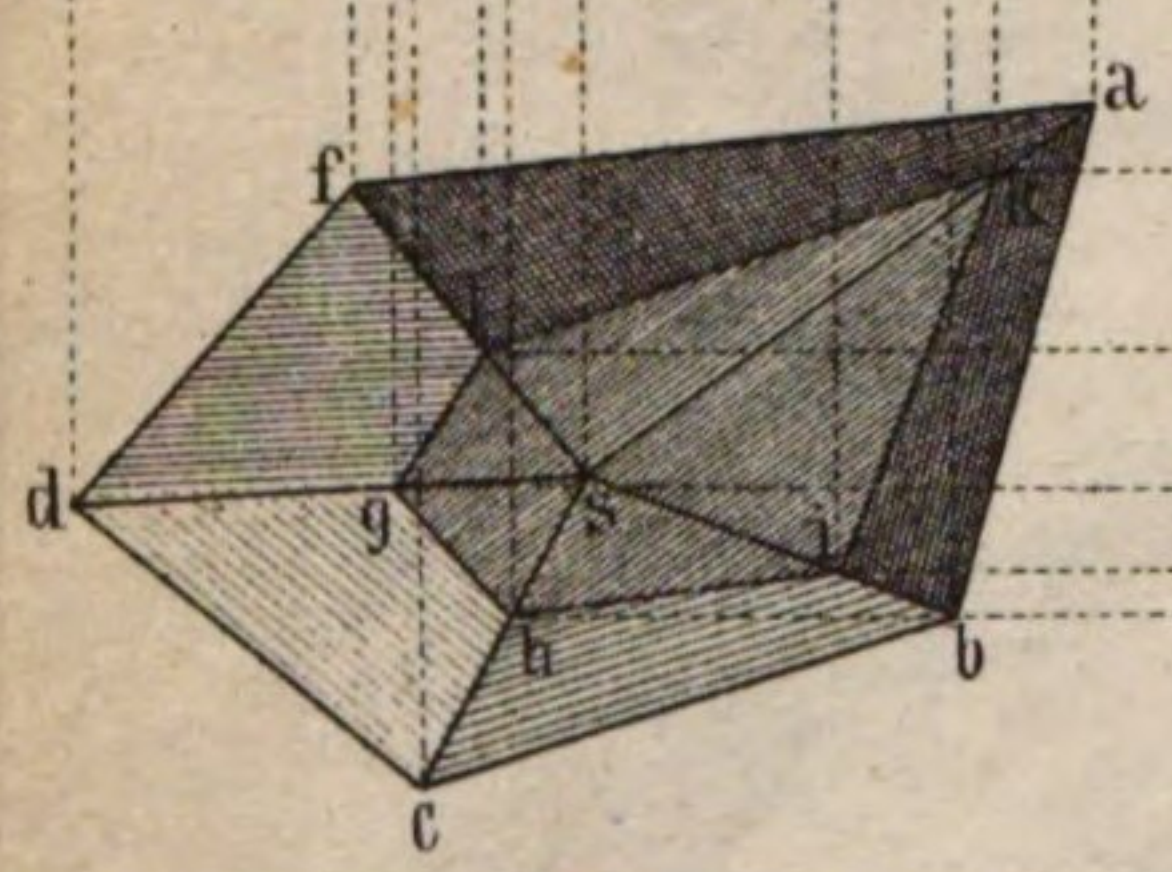
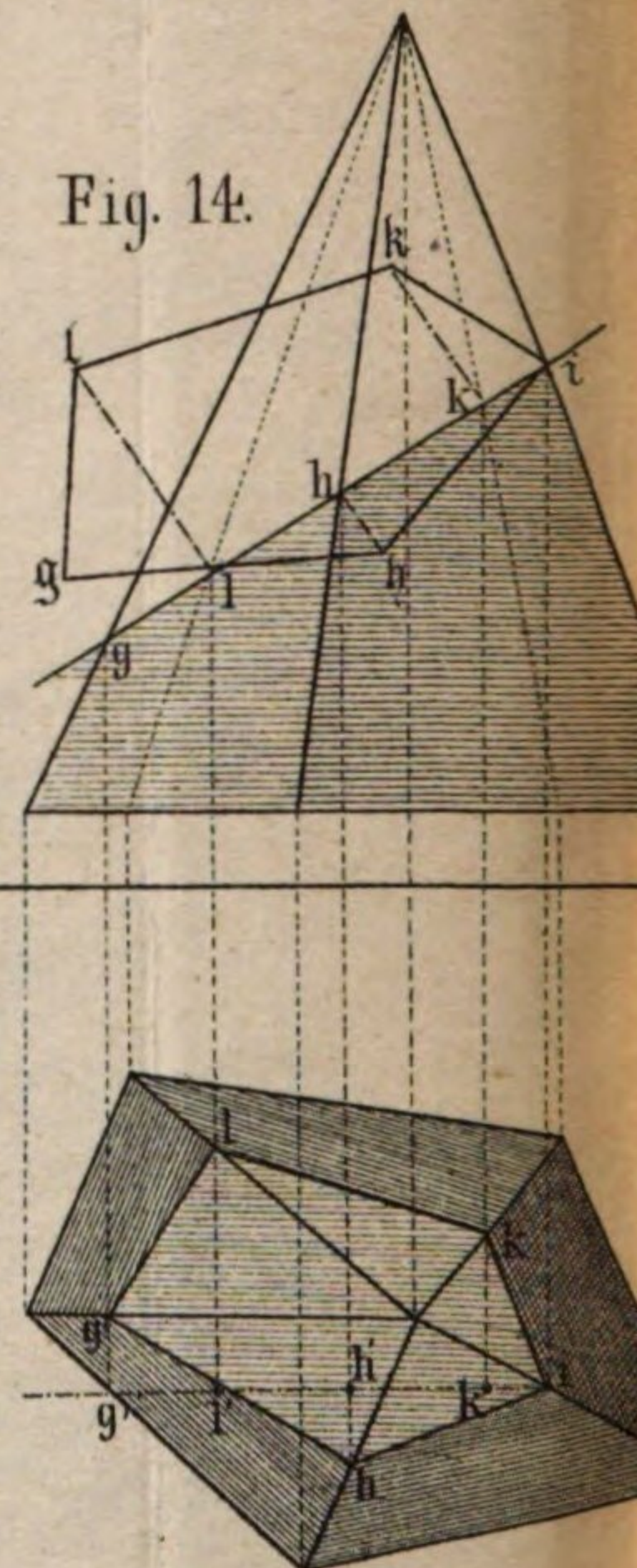
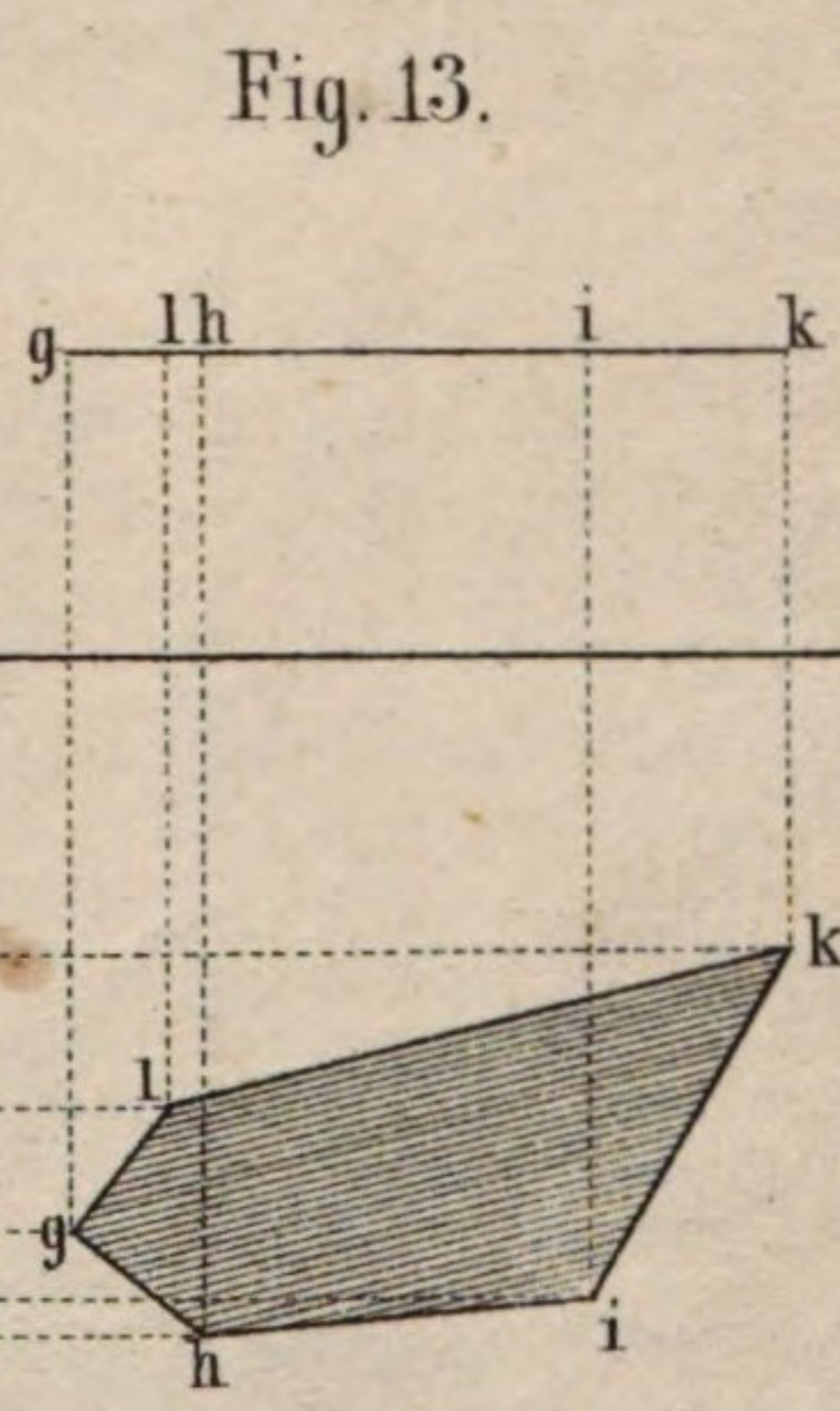
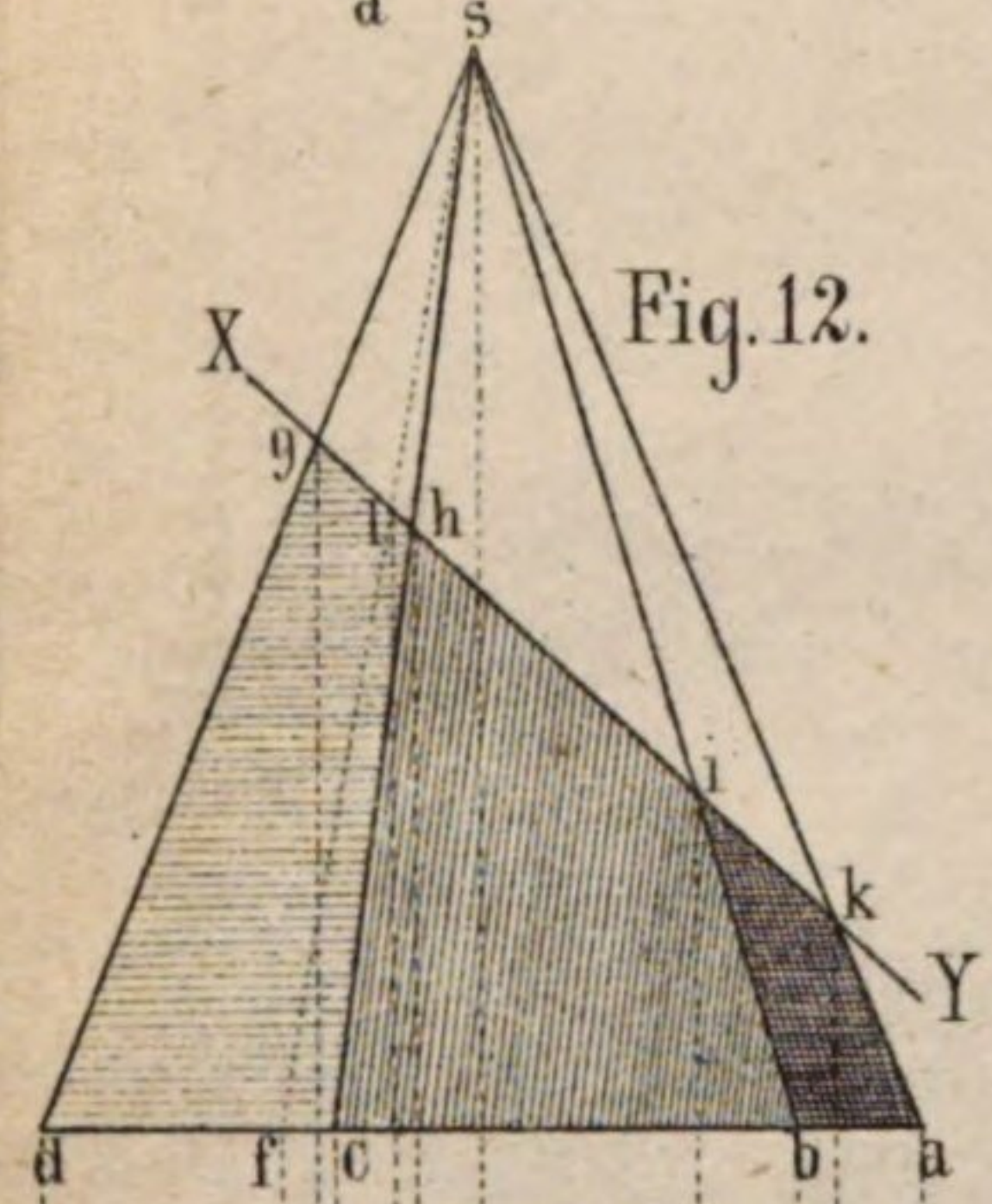
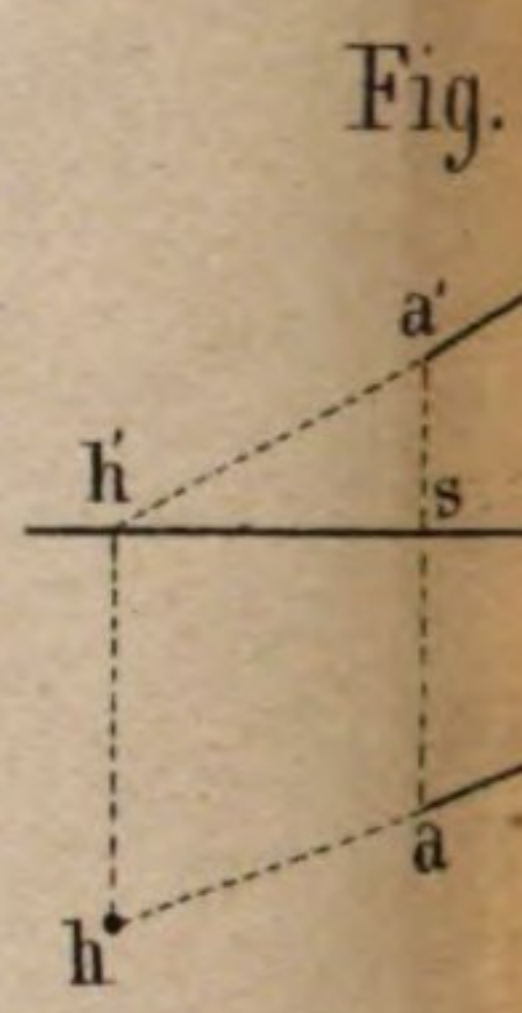
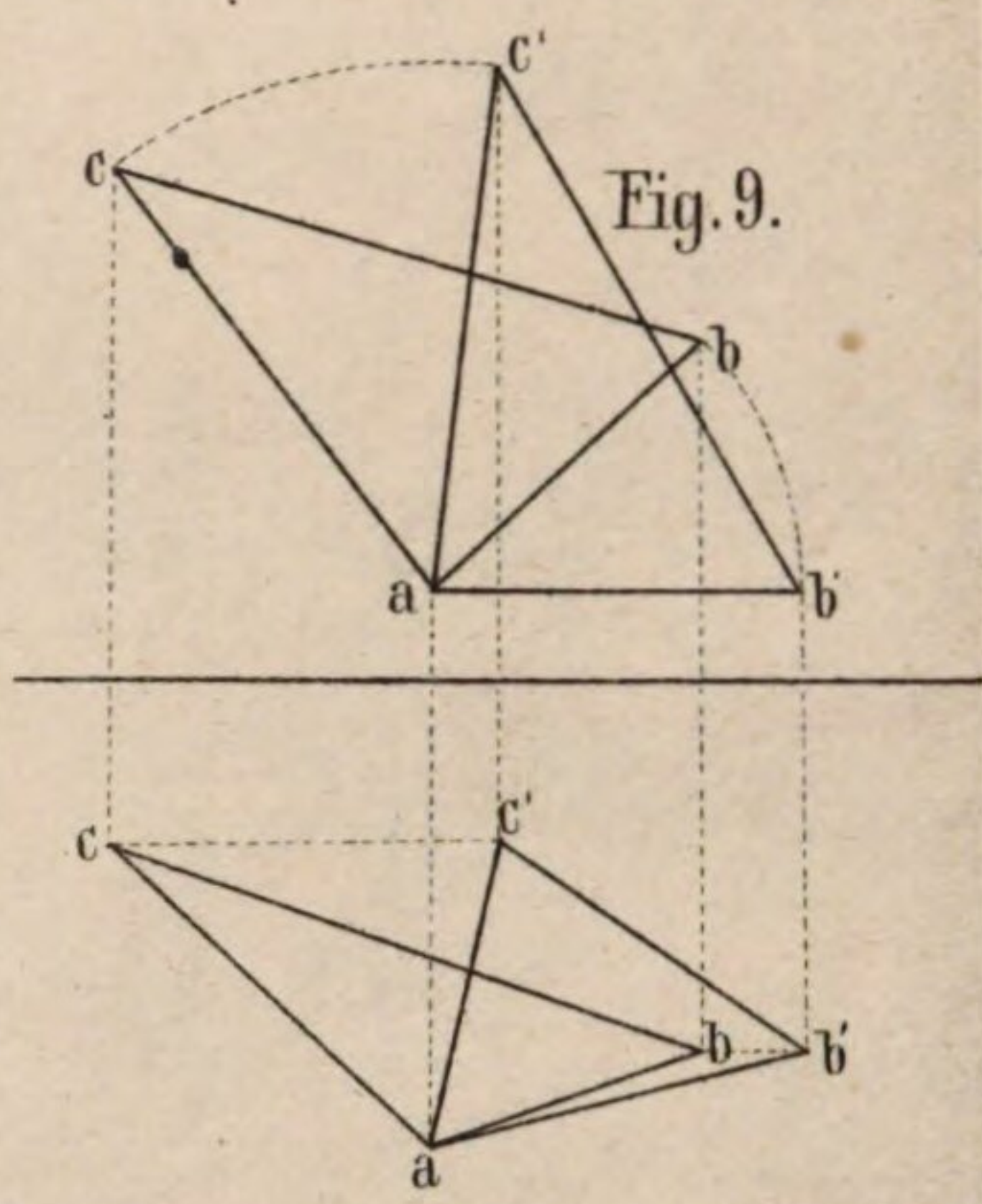
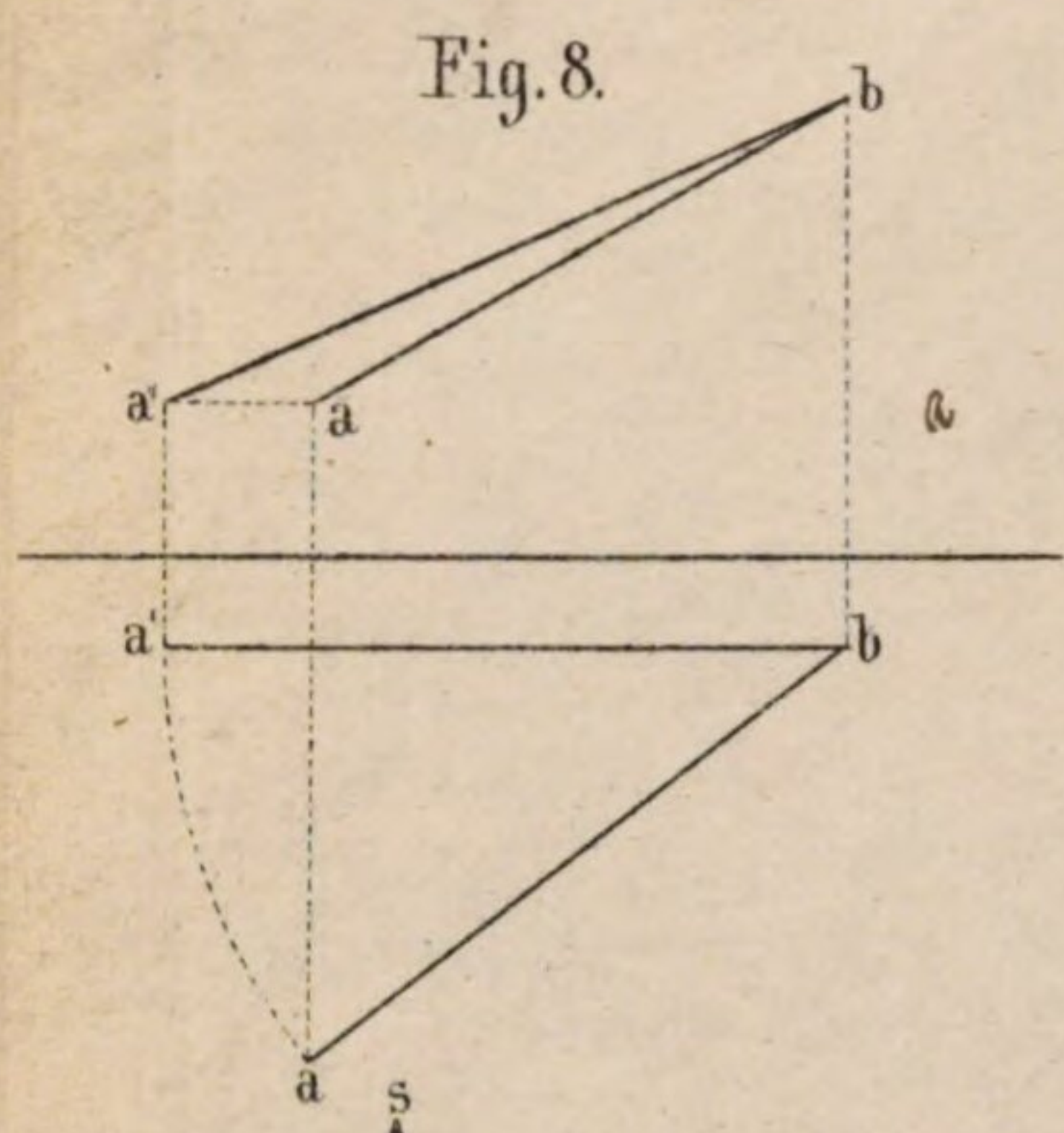
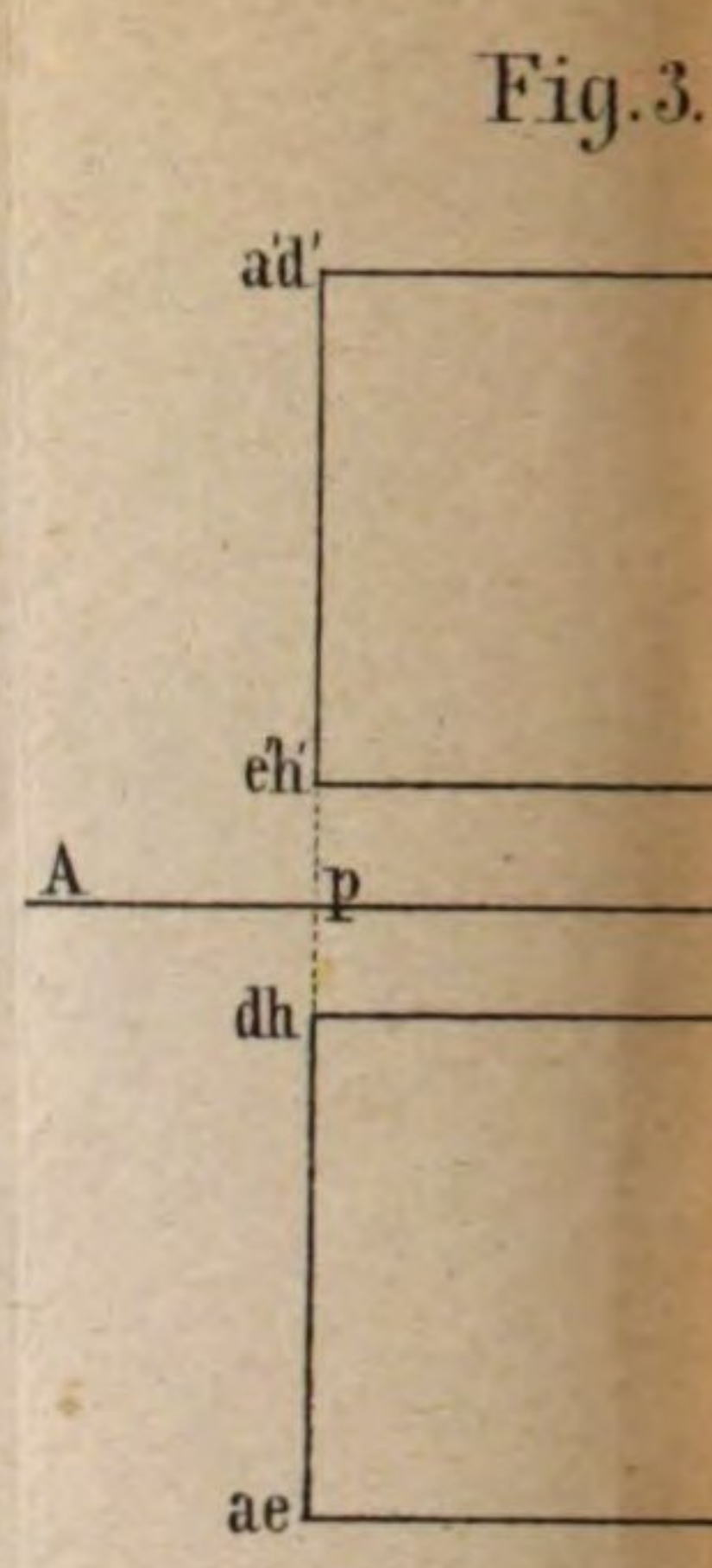
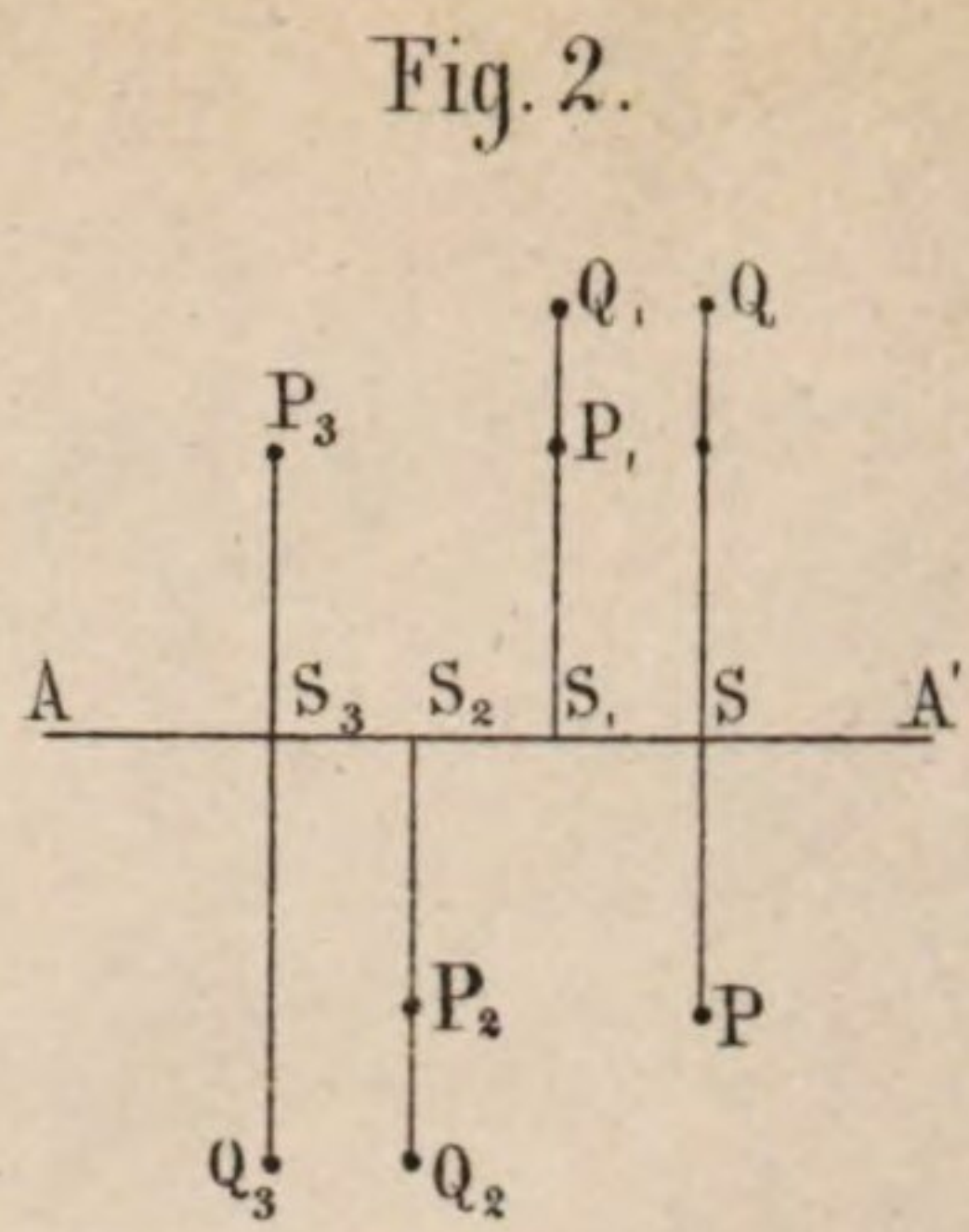
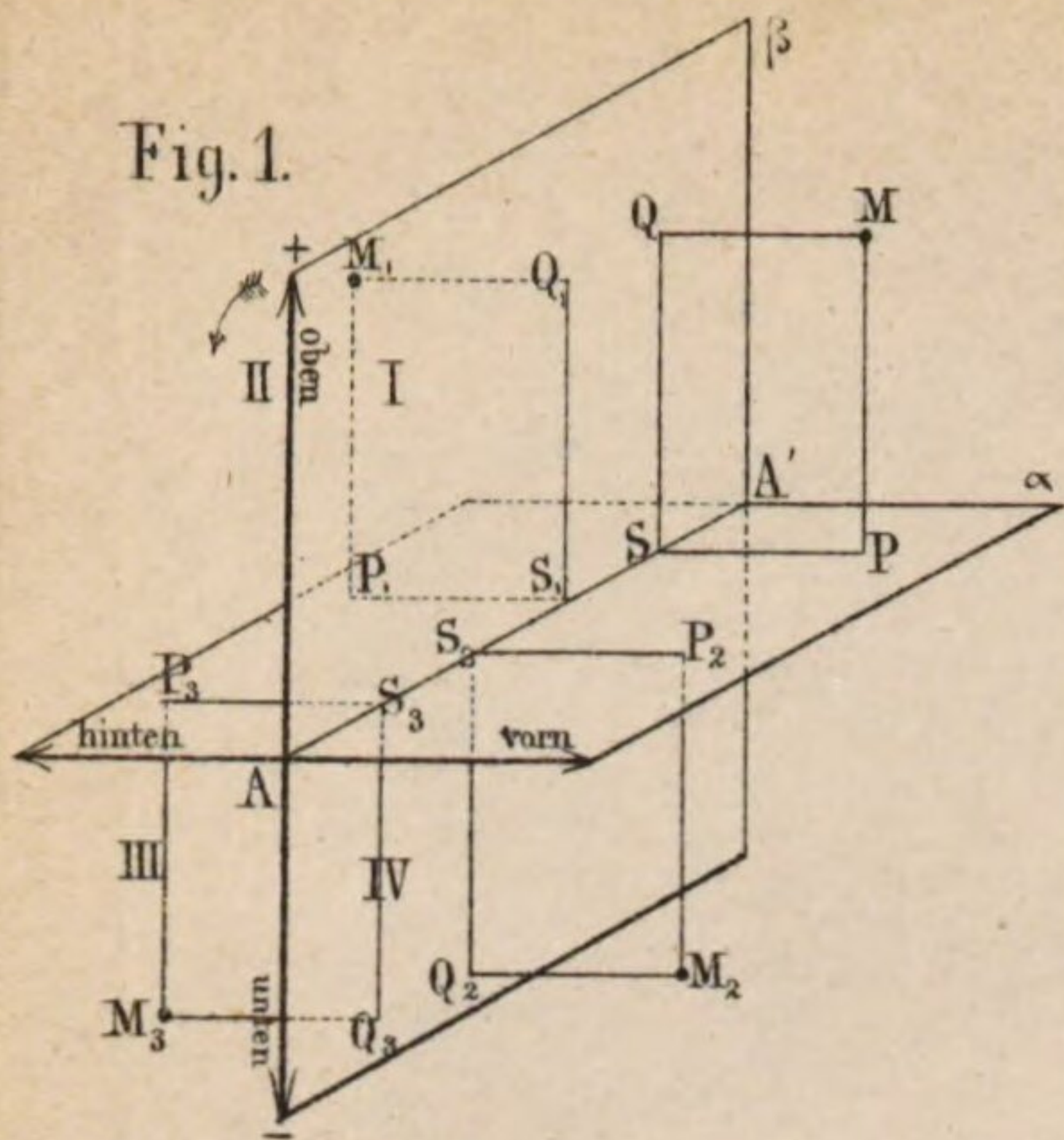


Fig. 5







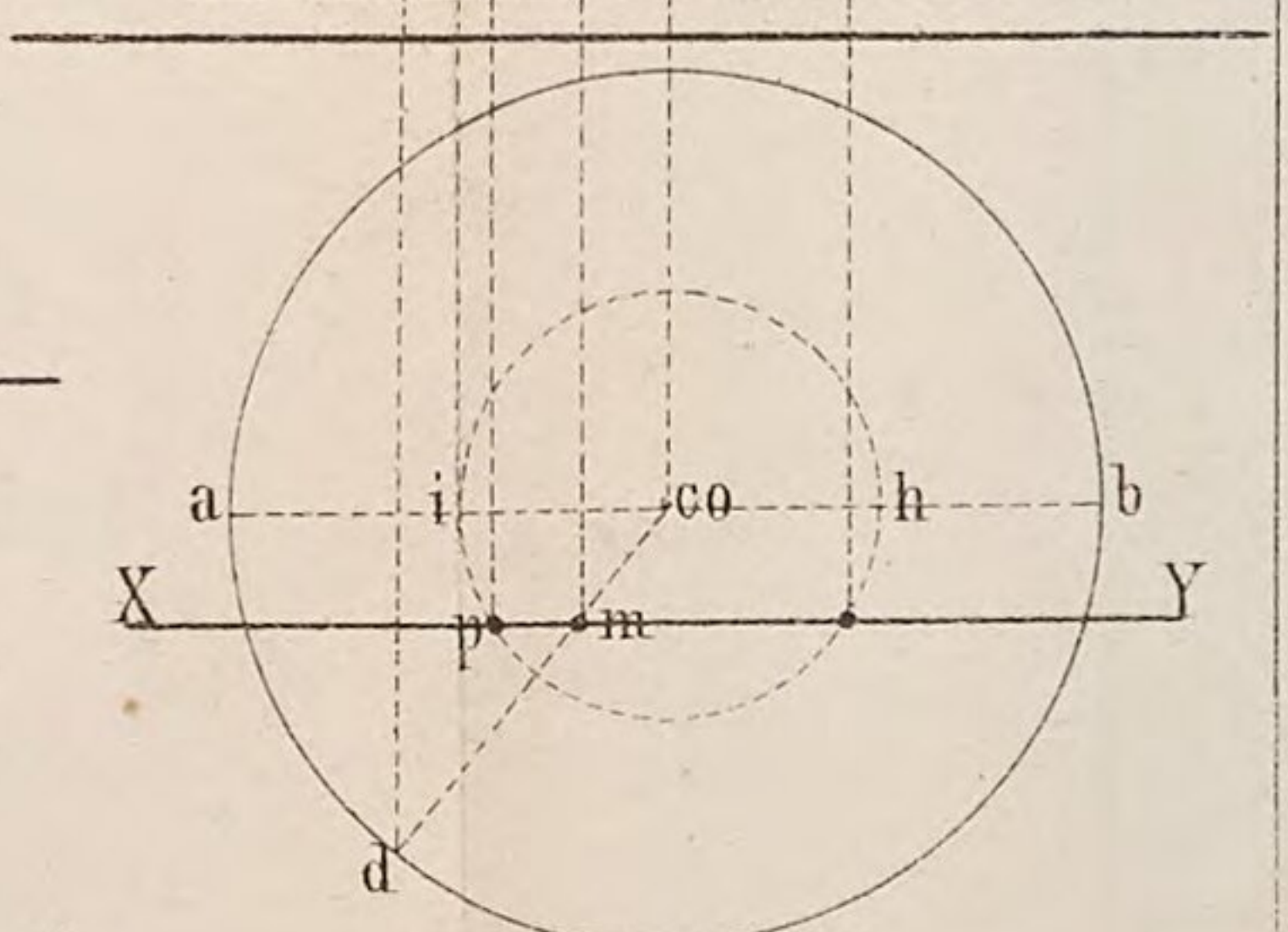
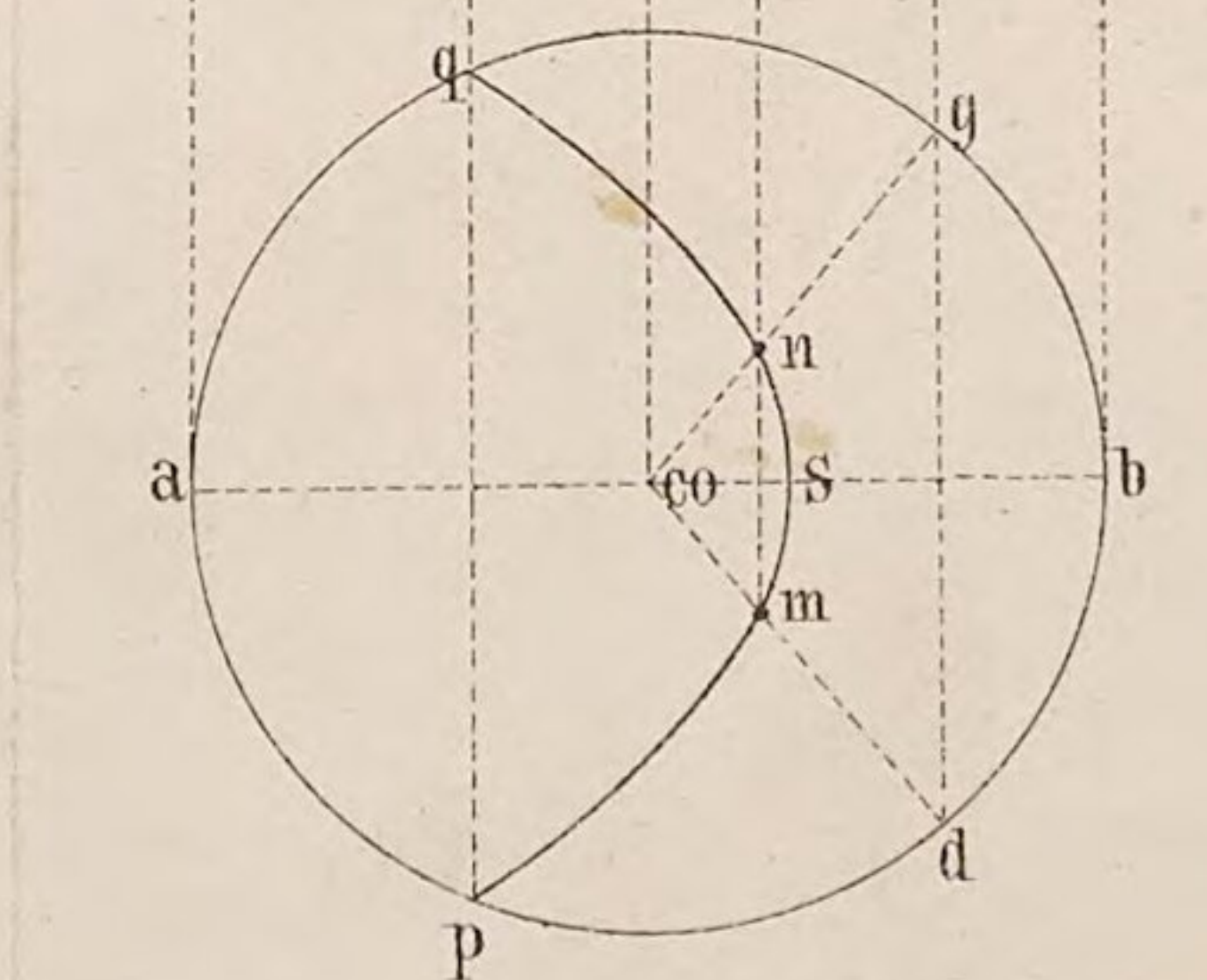
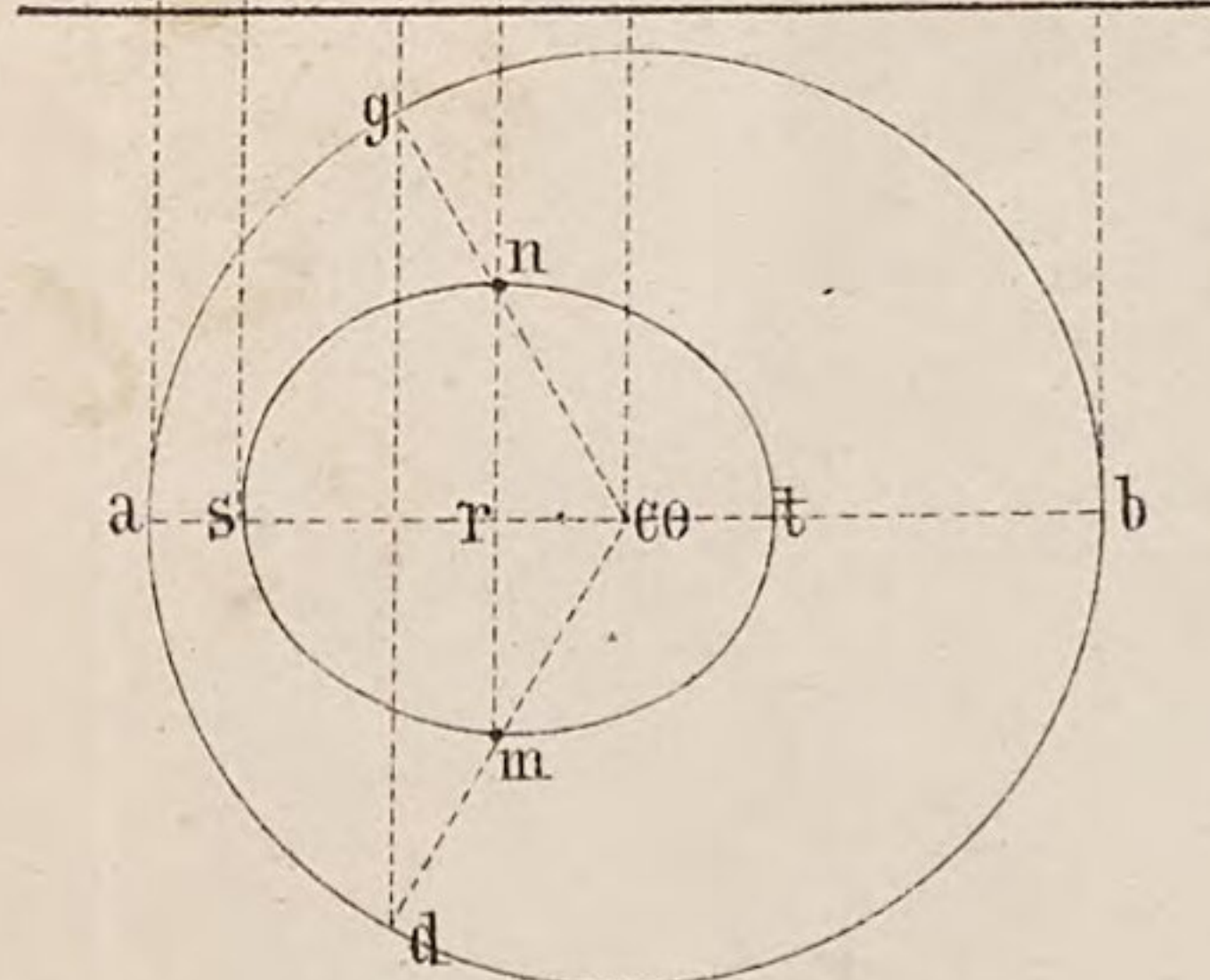
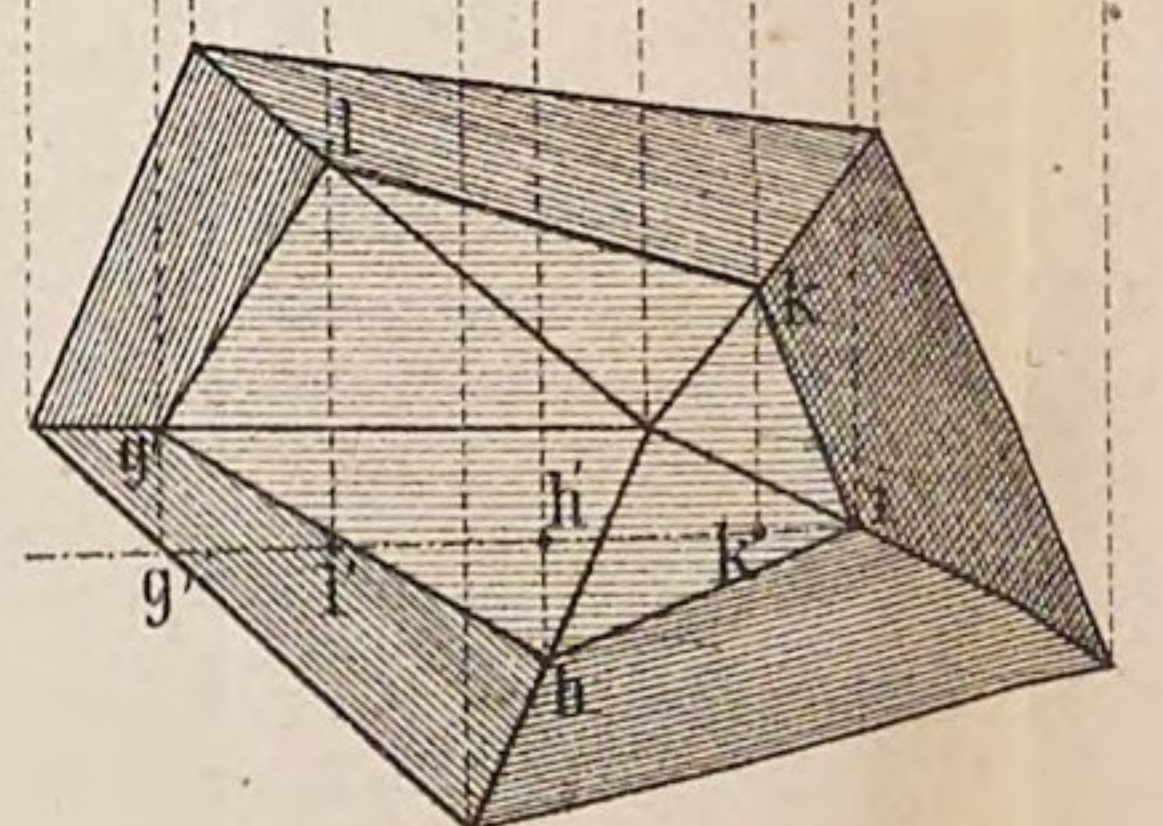
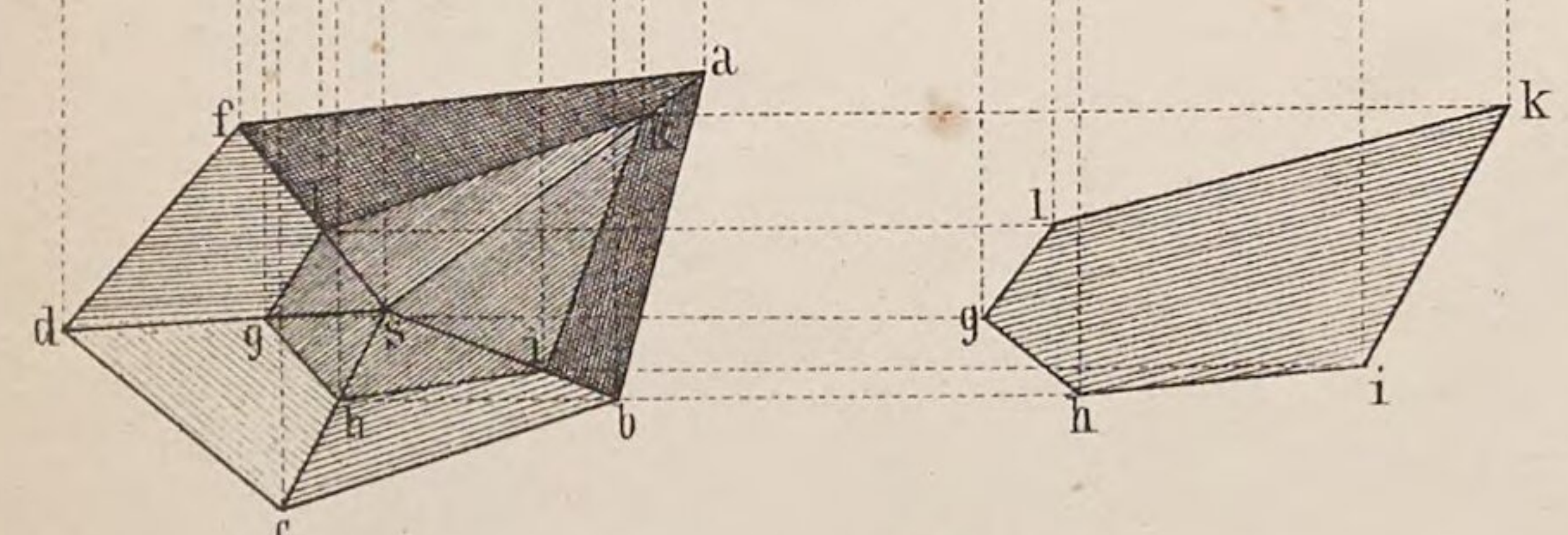
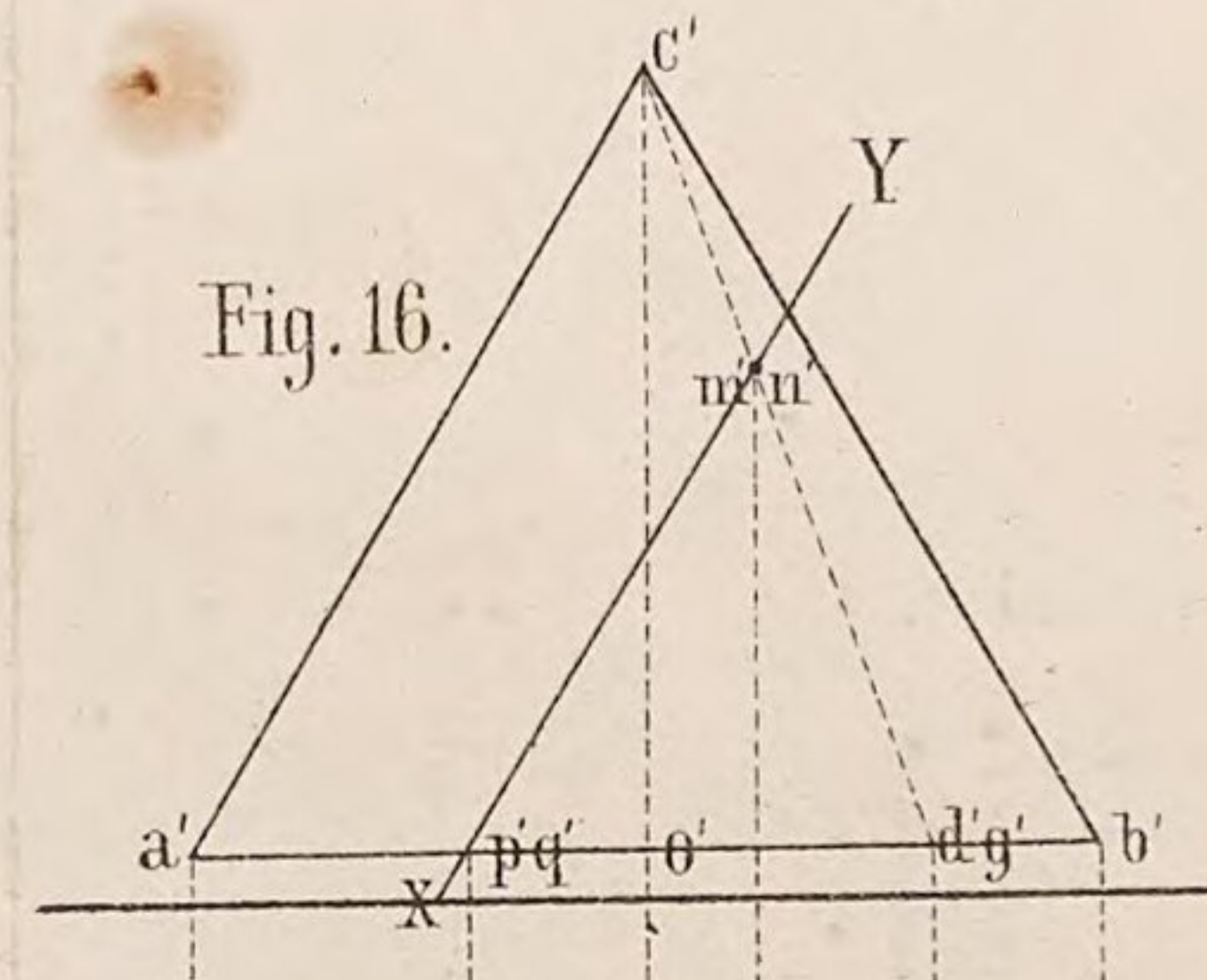
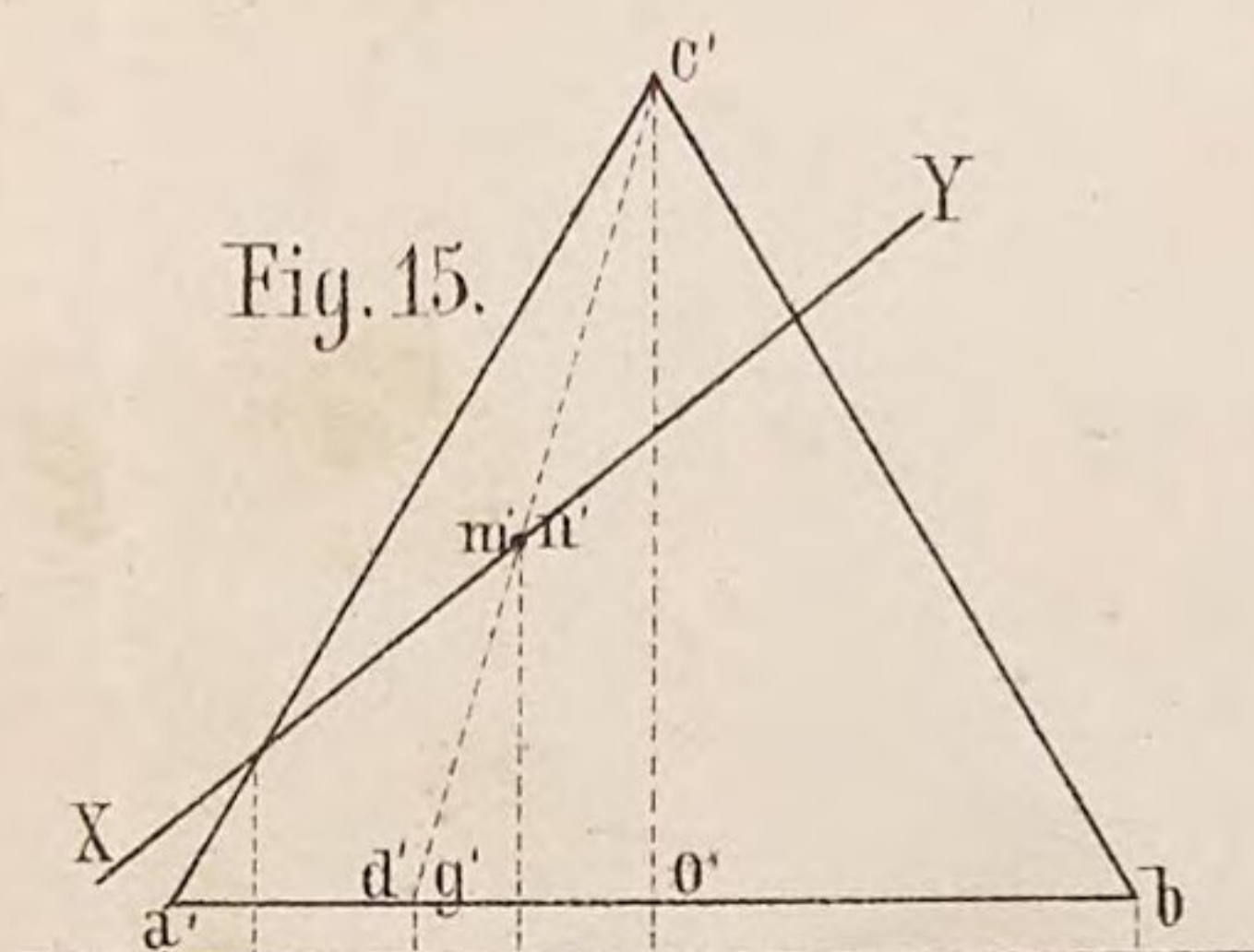
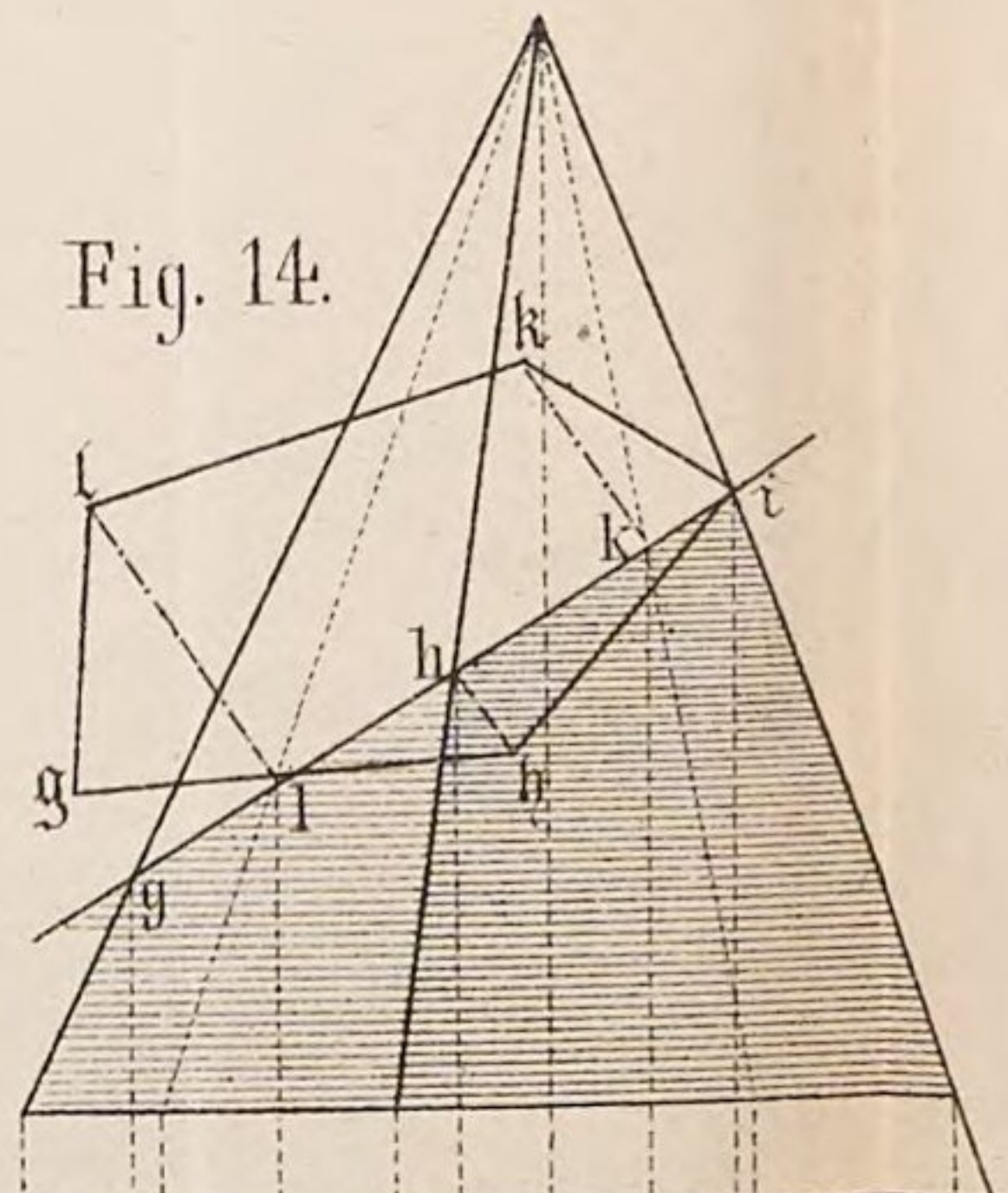
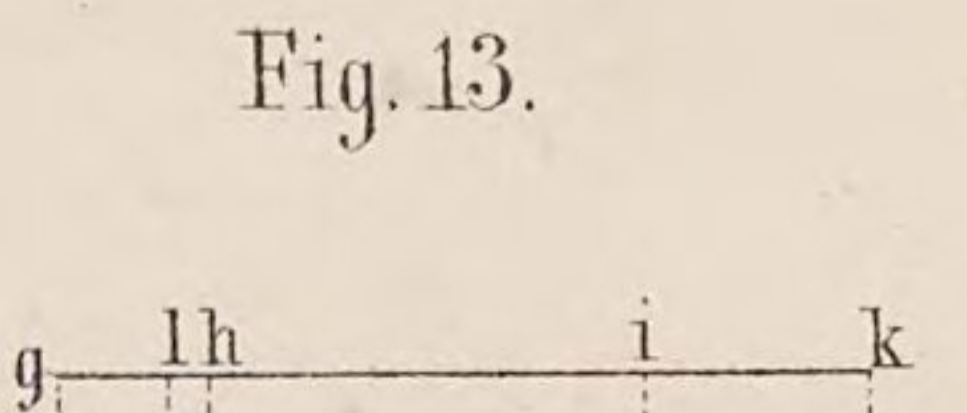
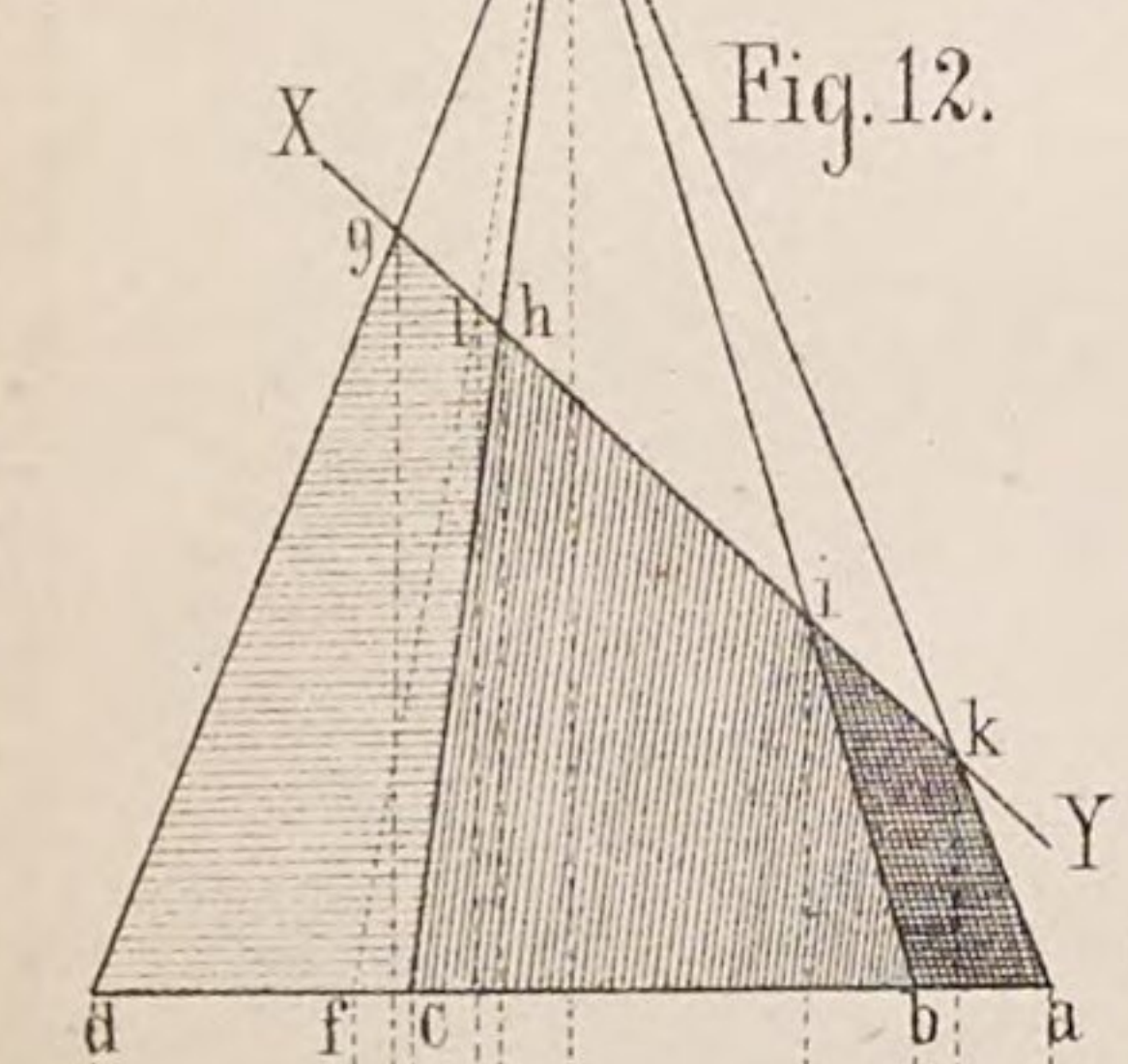
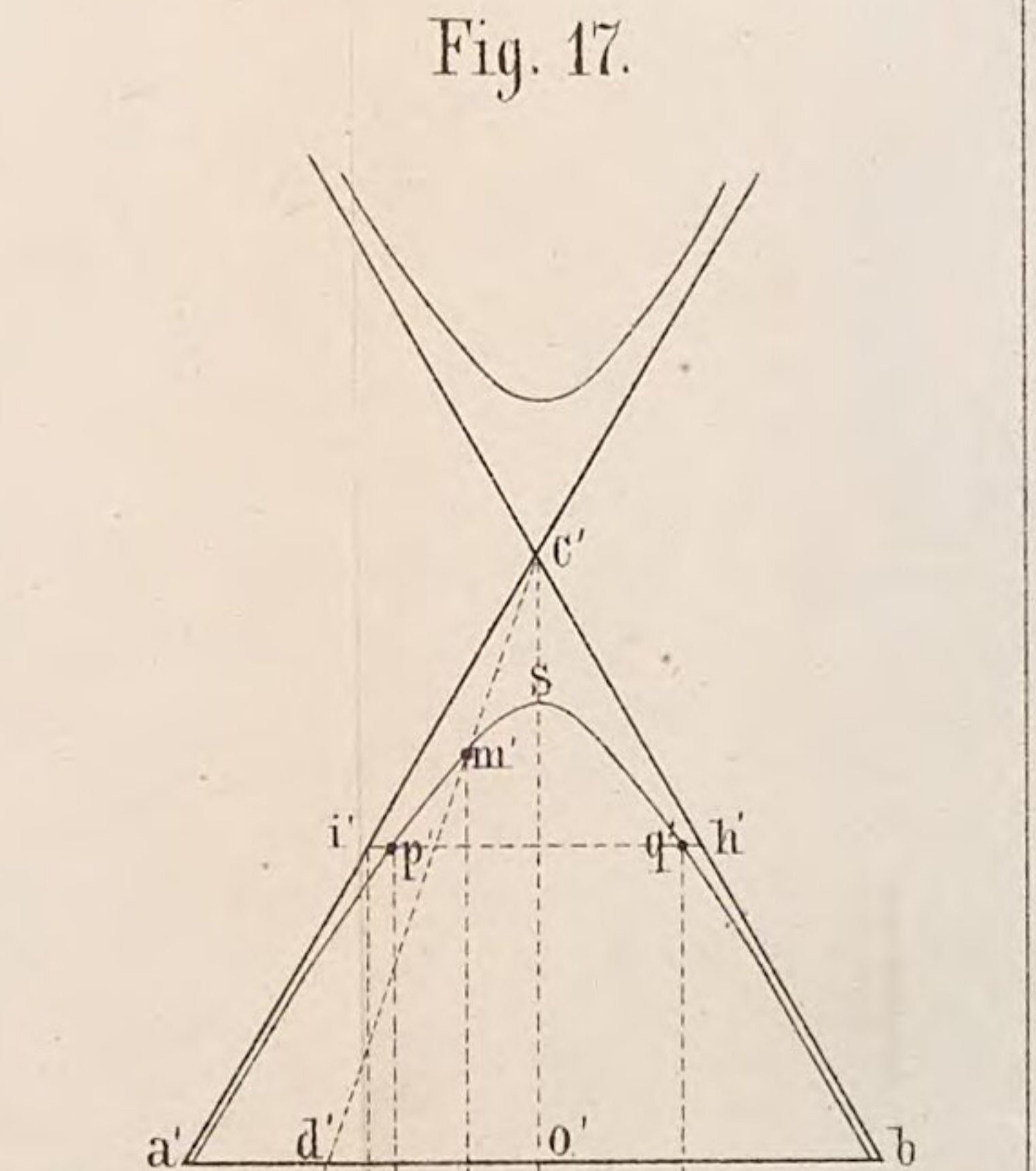
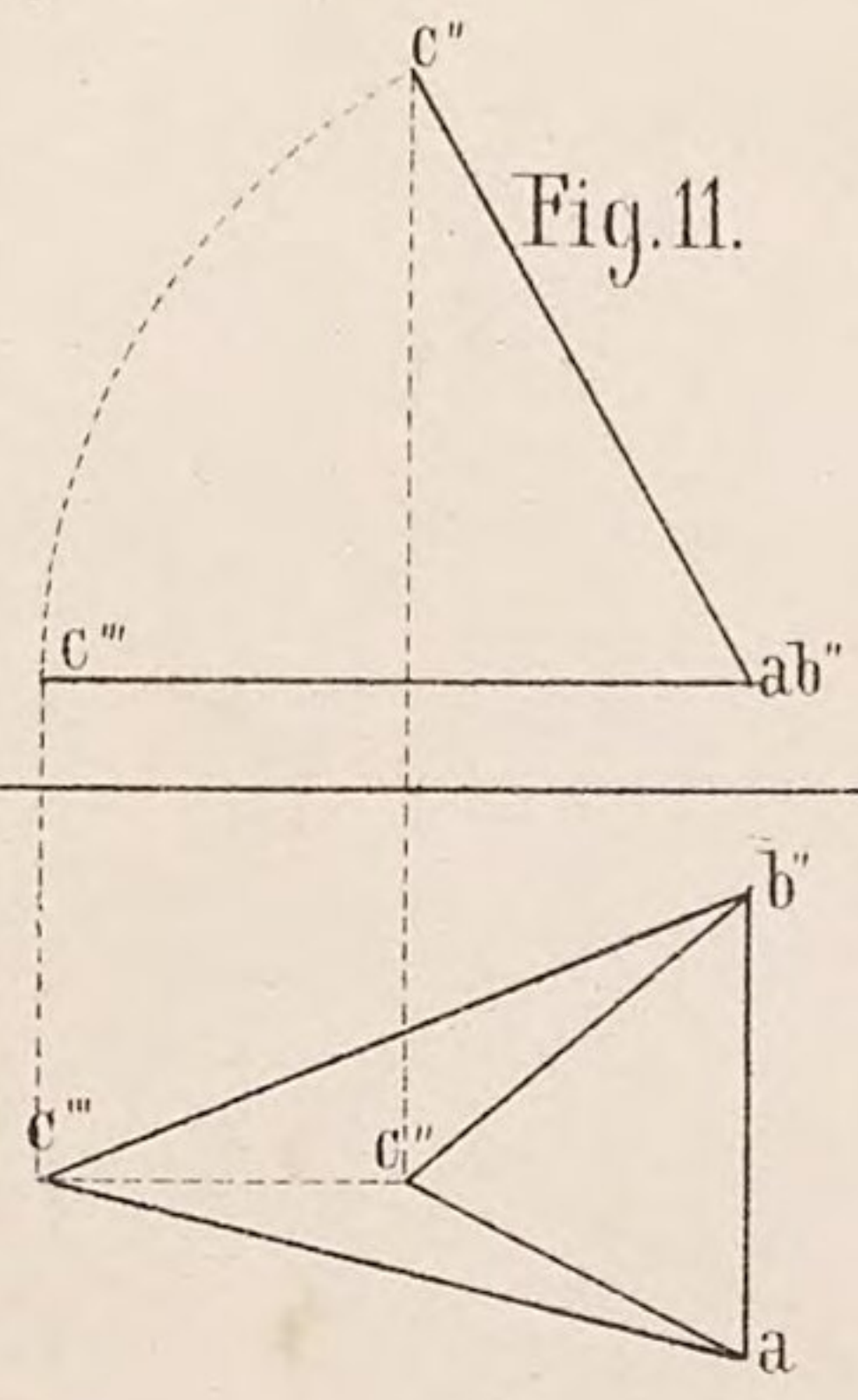
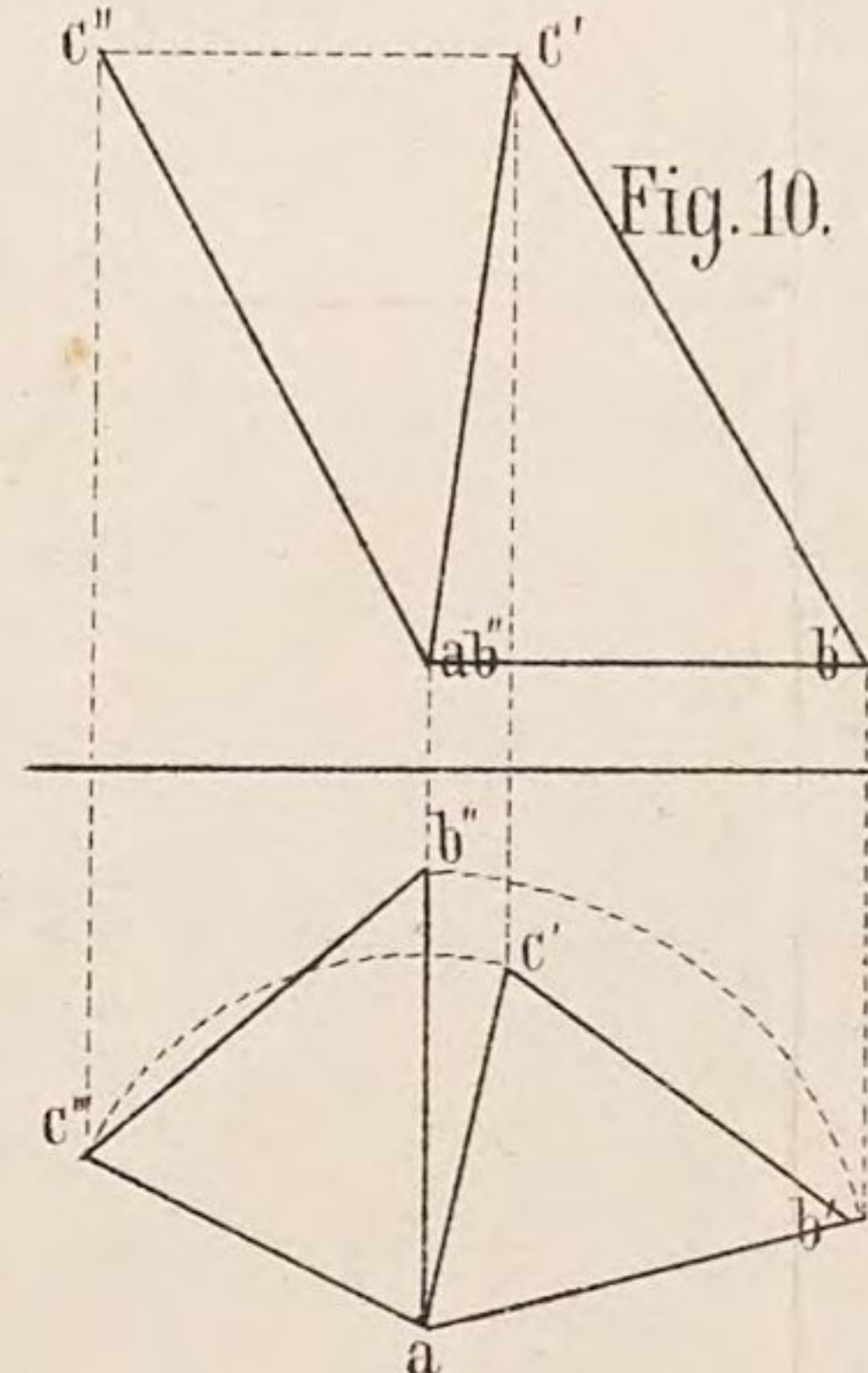
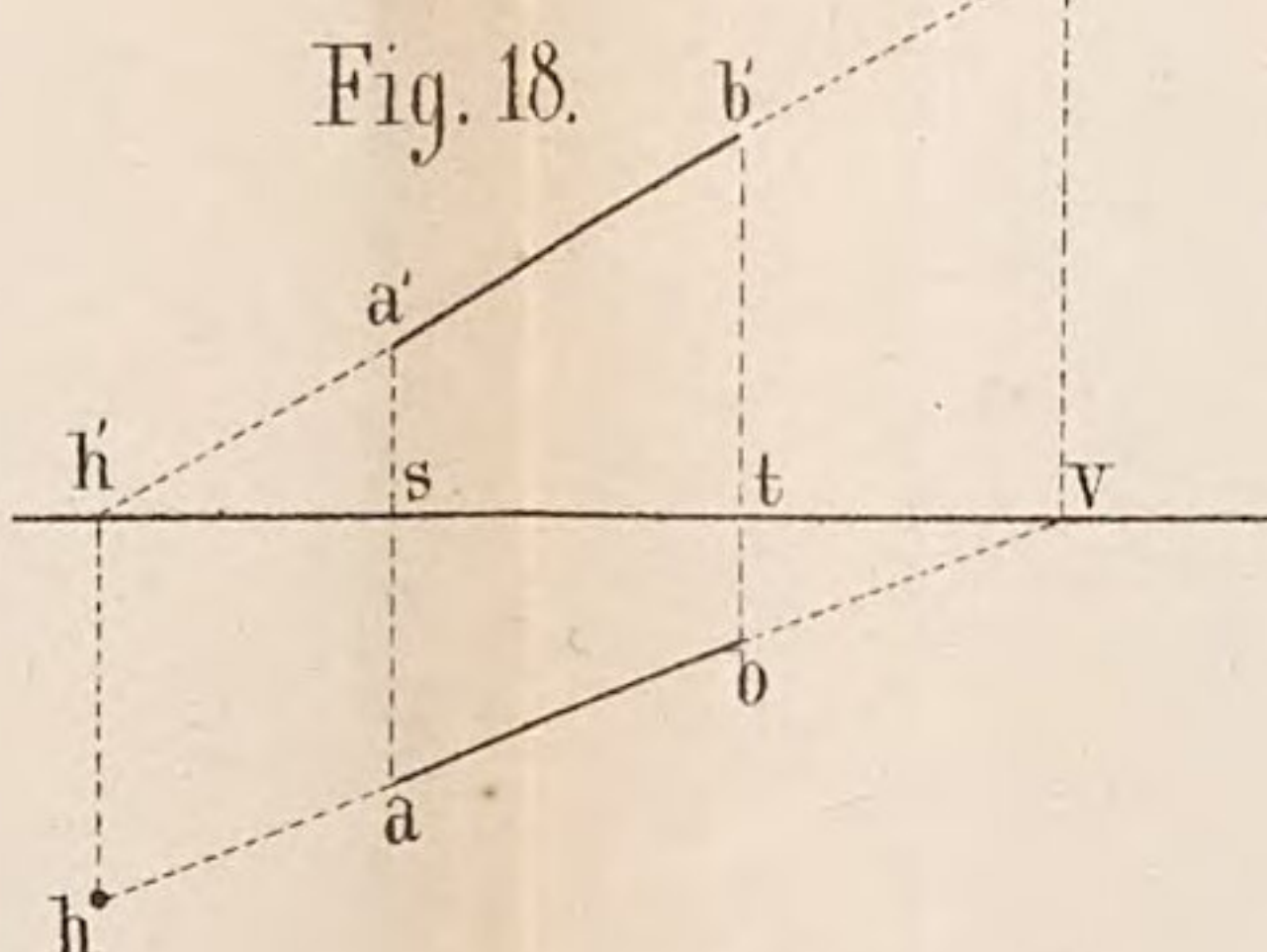
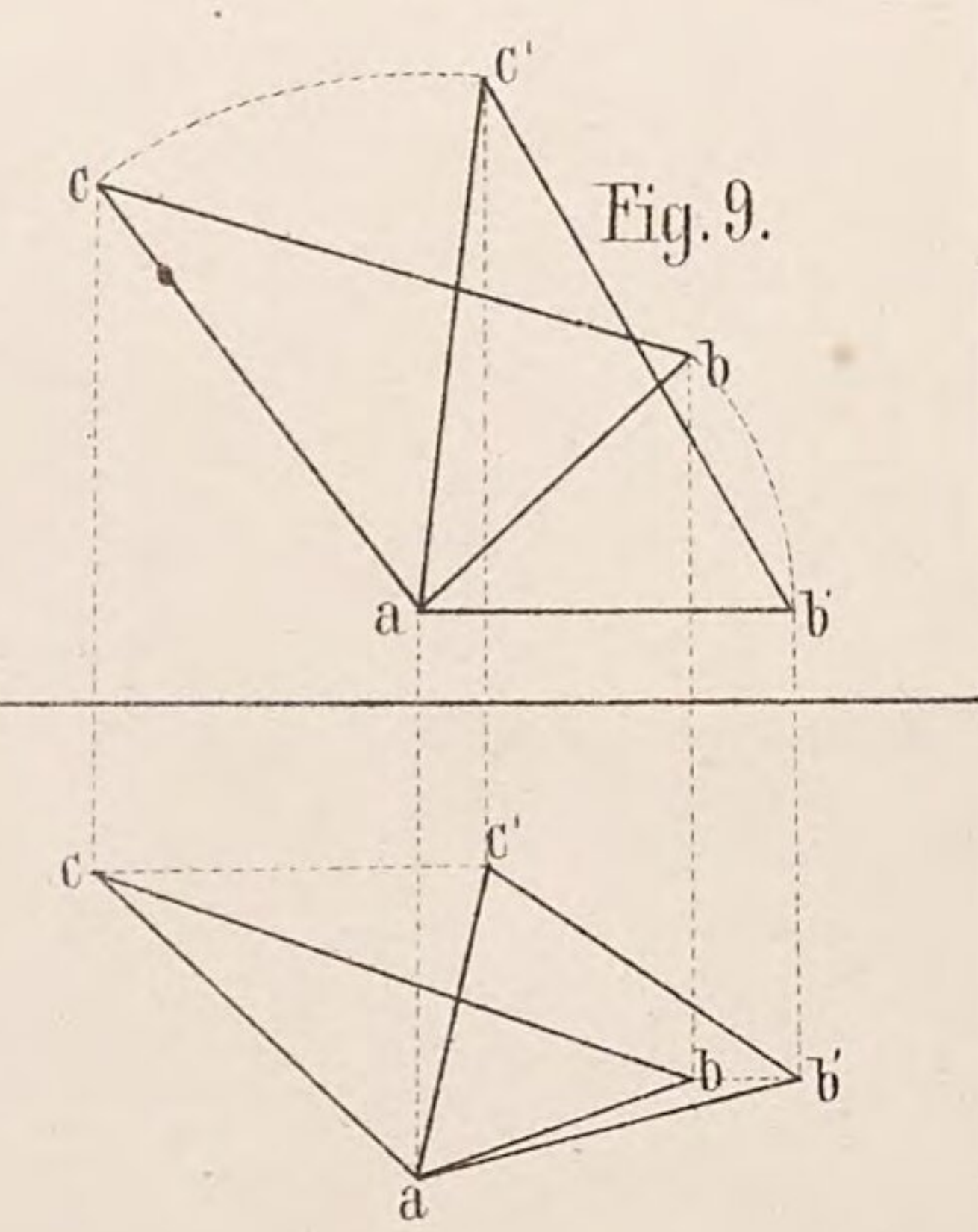
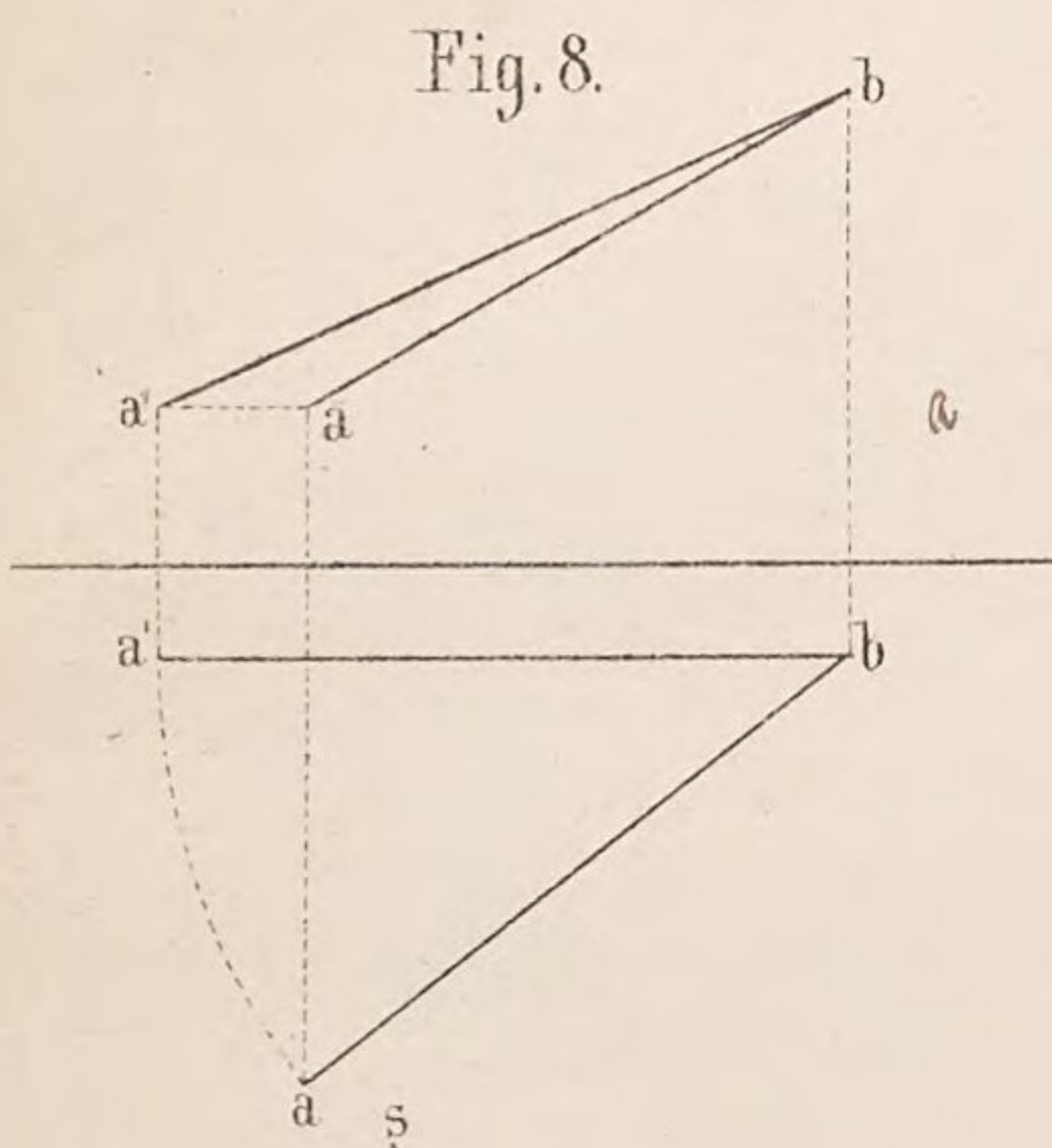
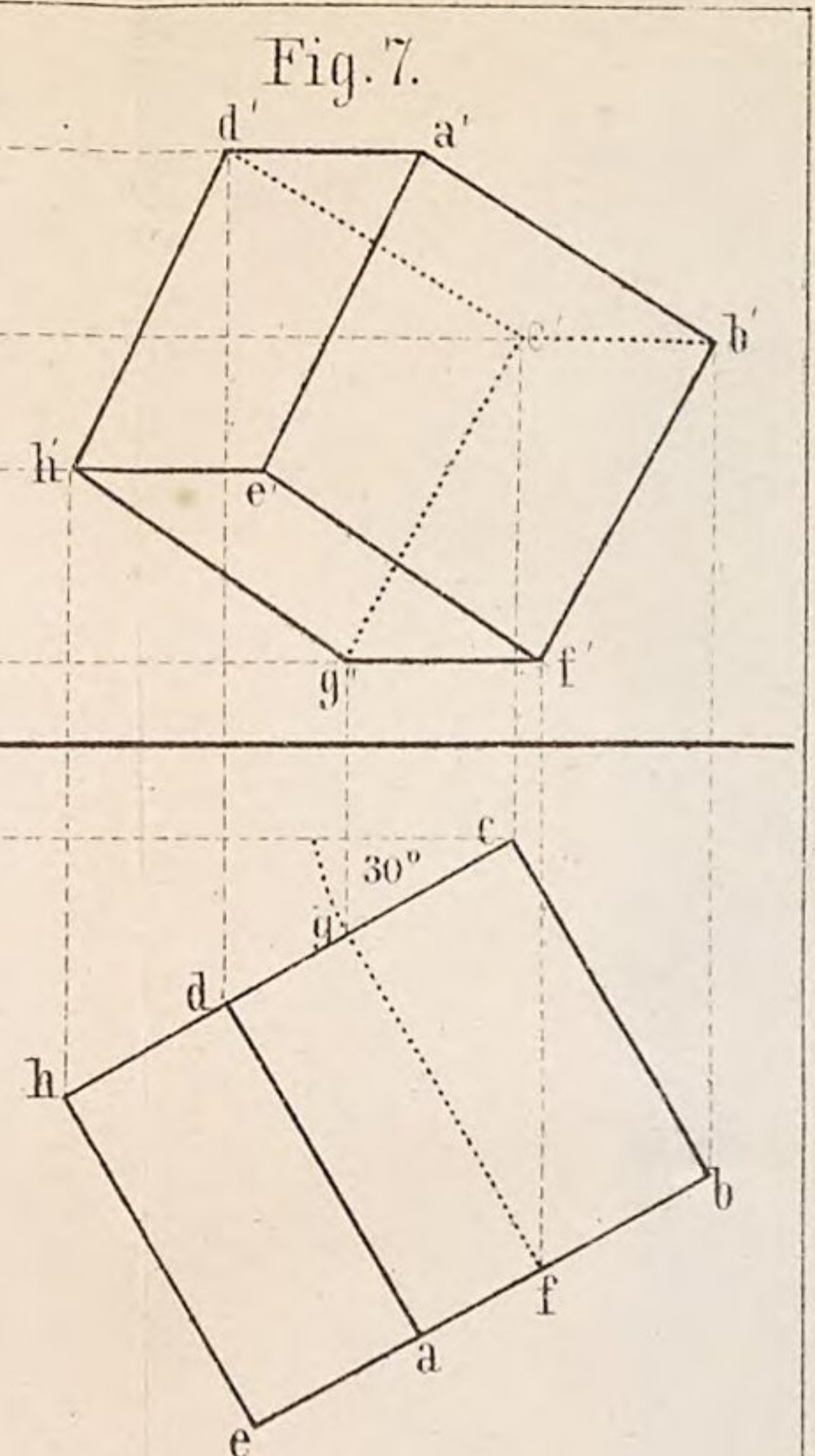
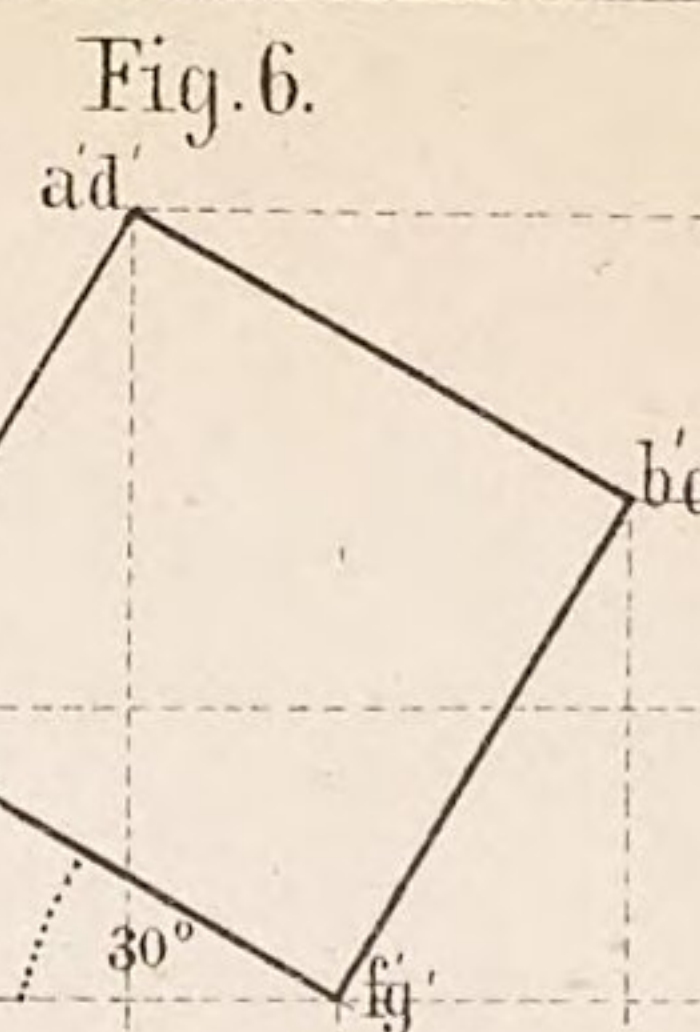
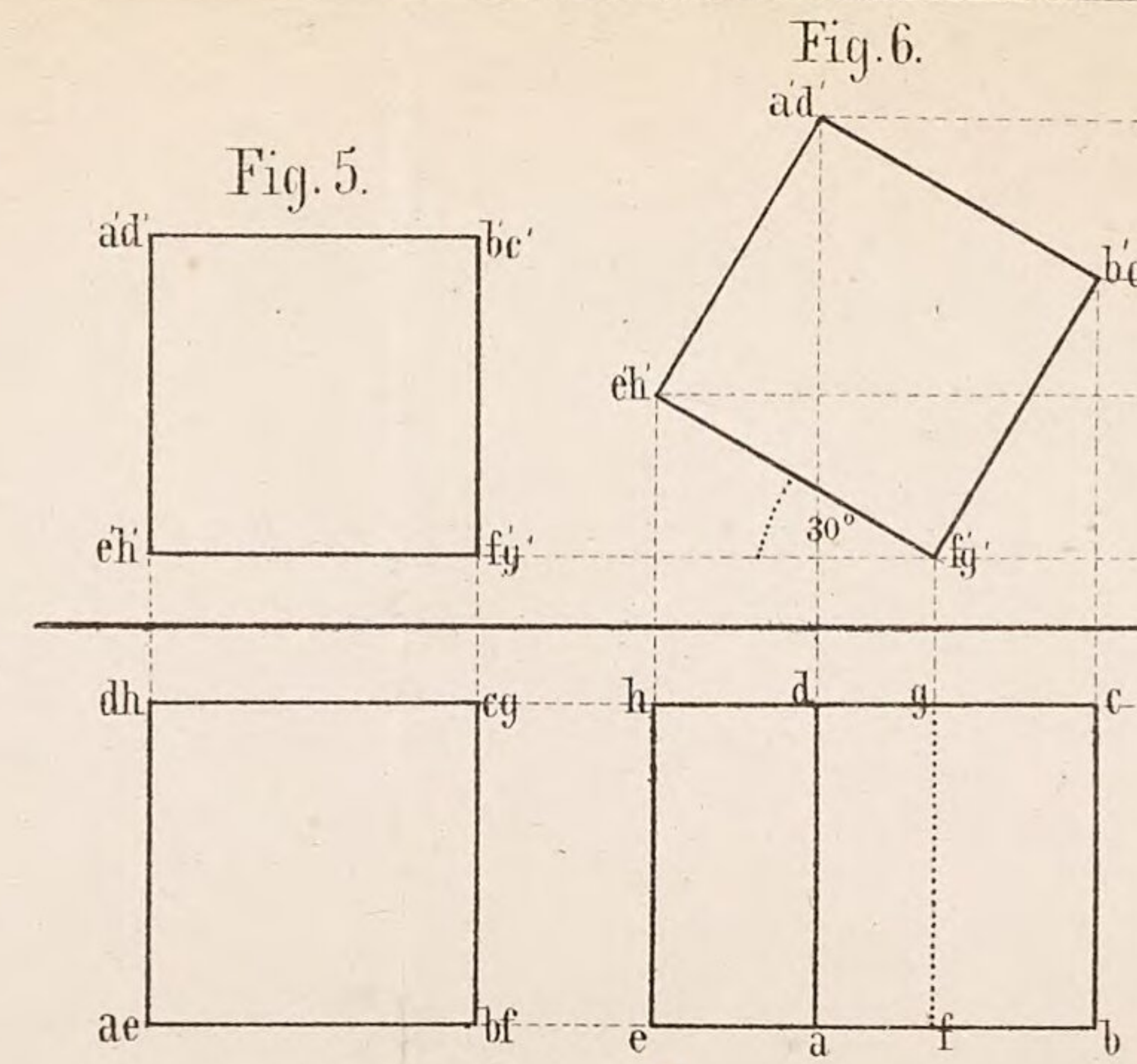
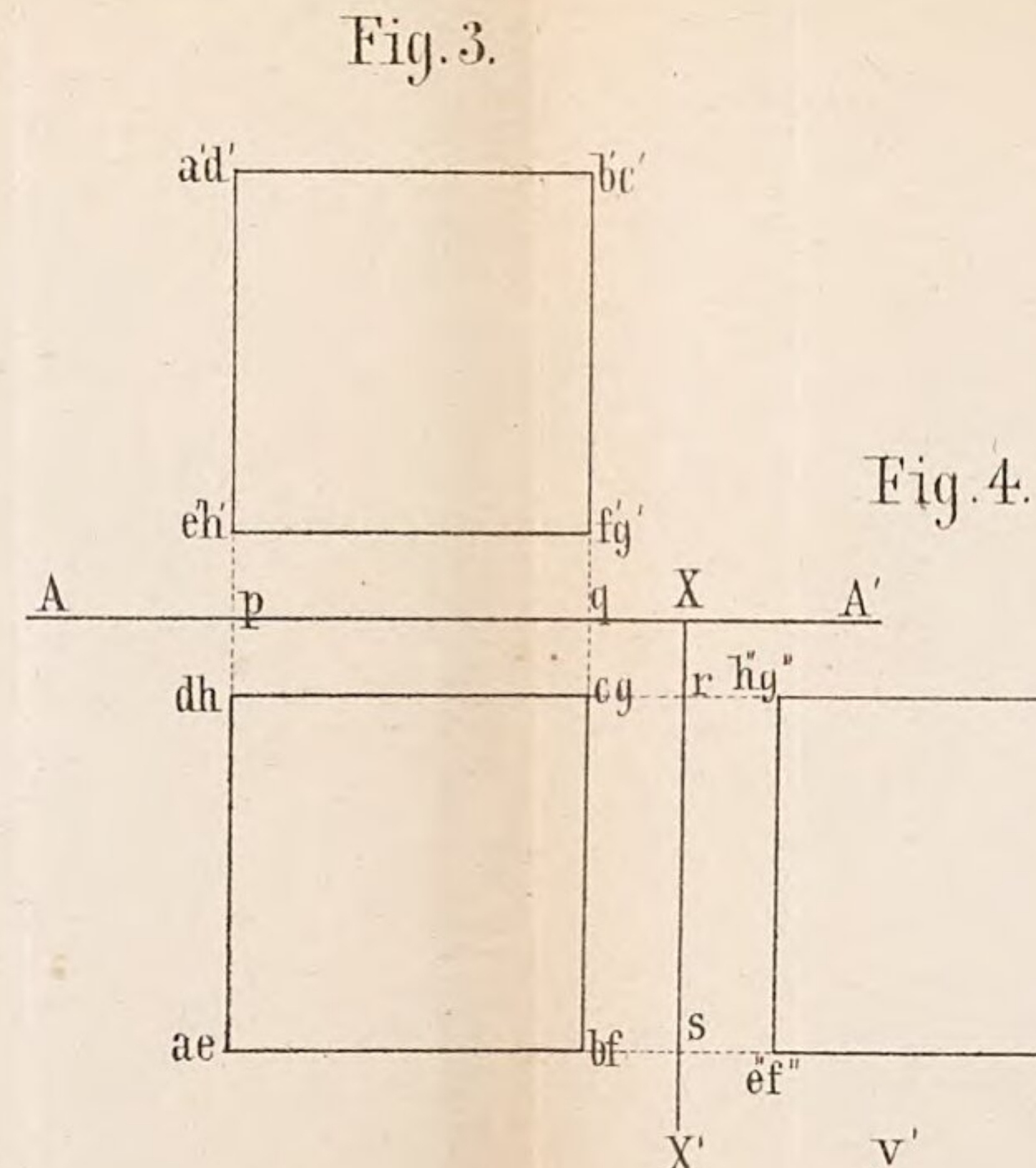
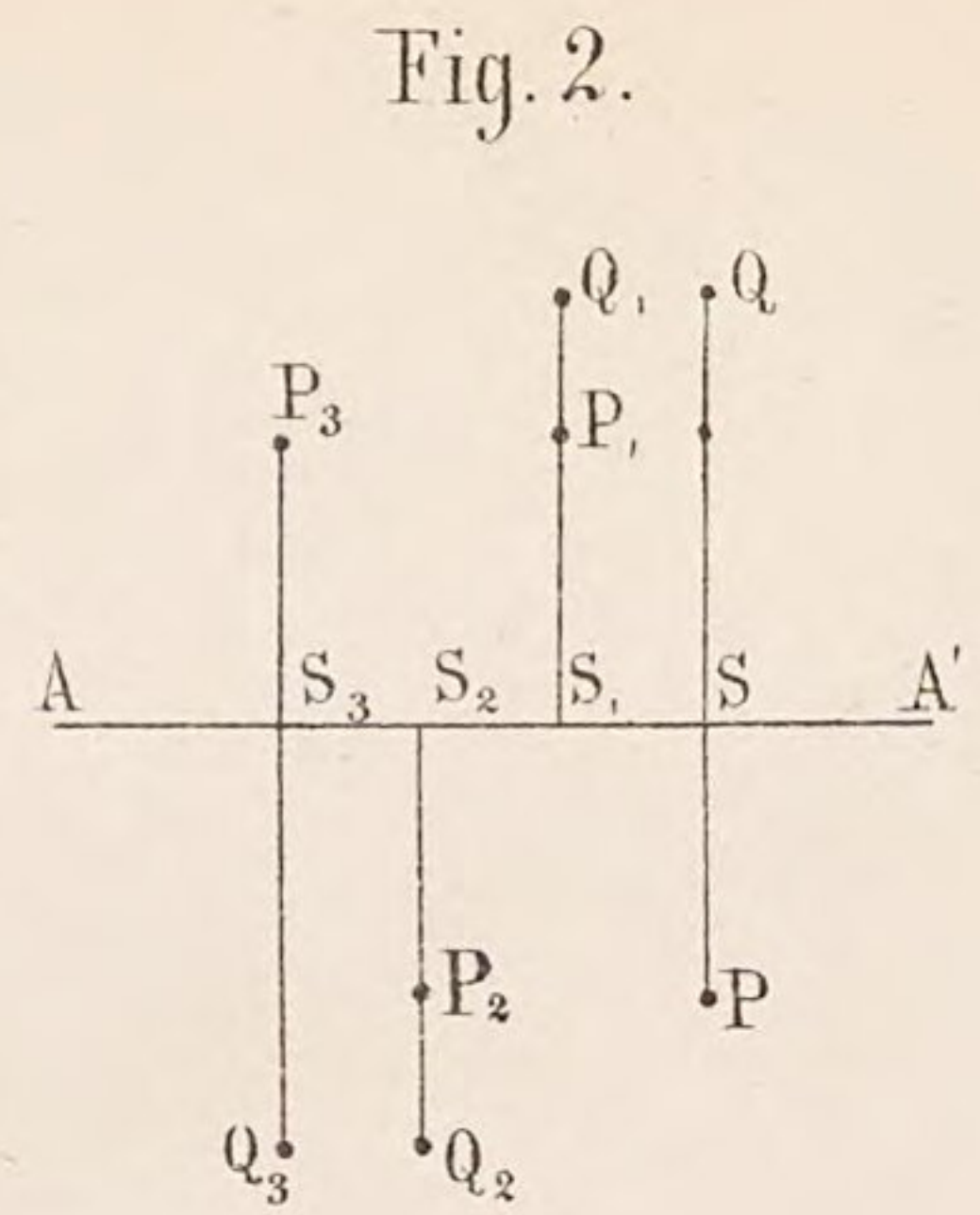
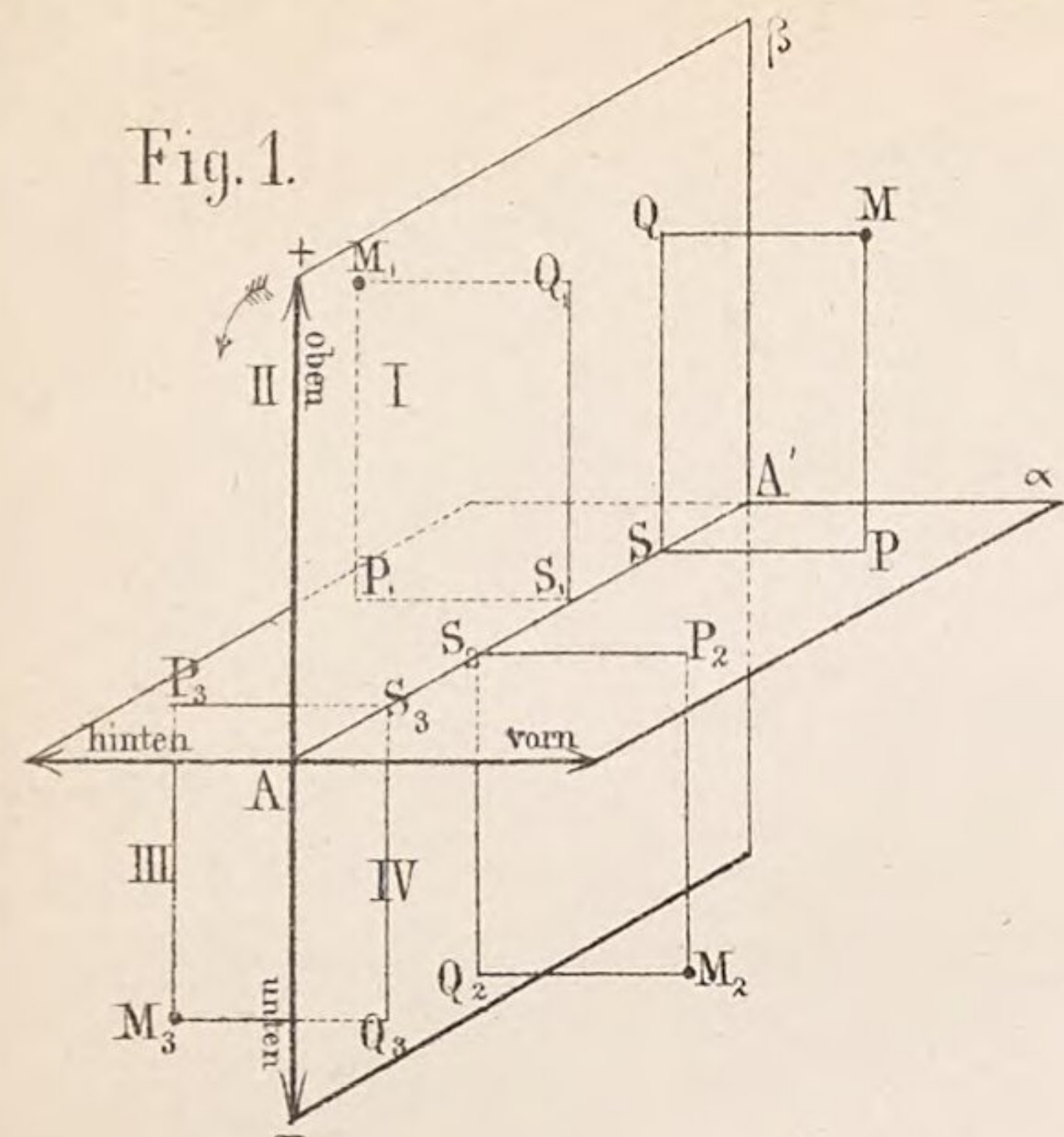


Fig. 7.

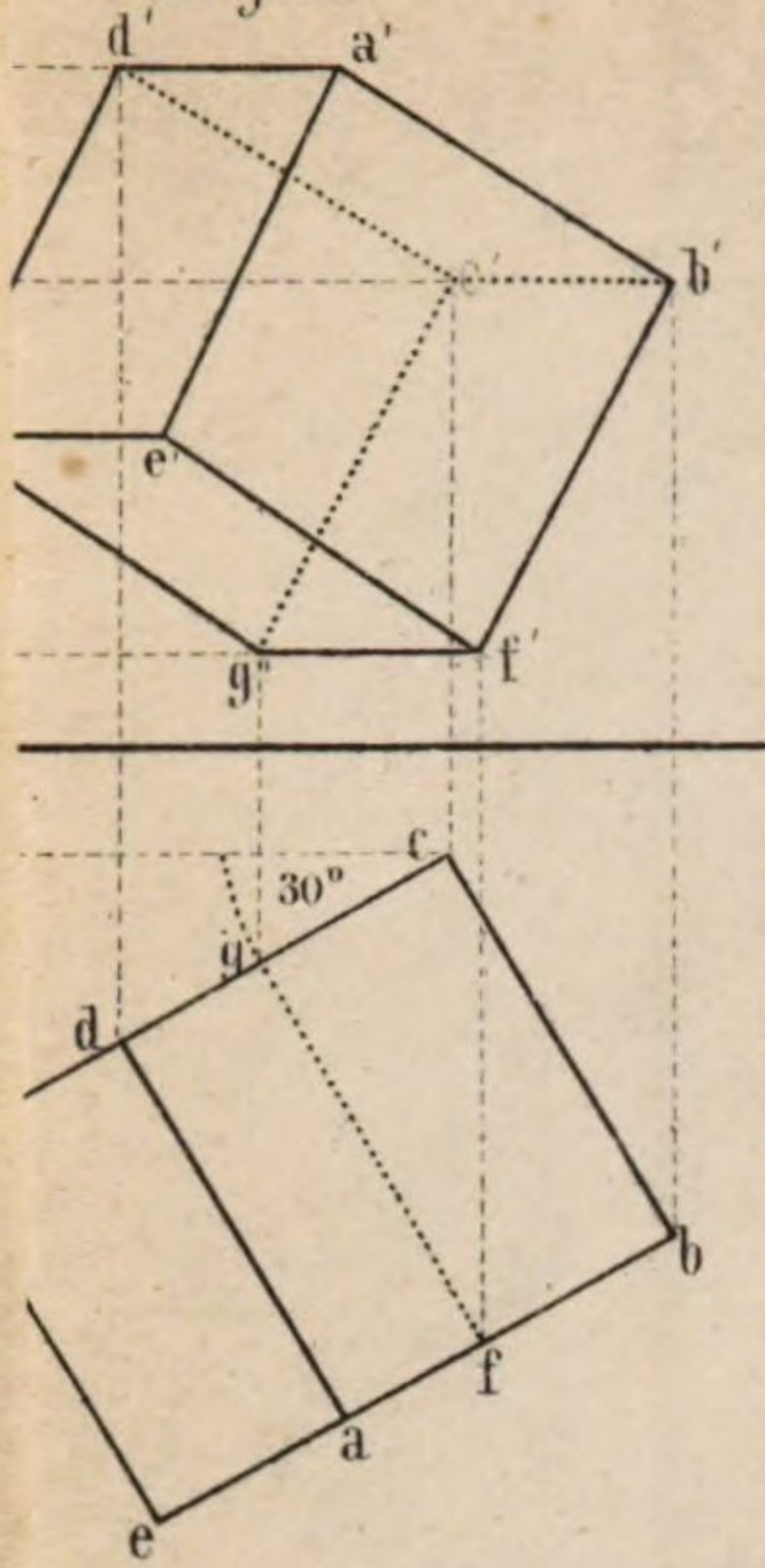
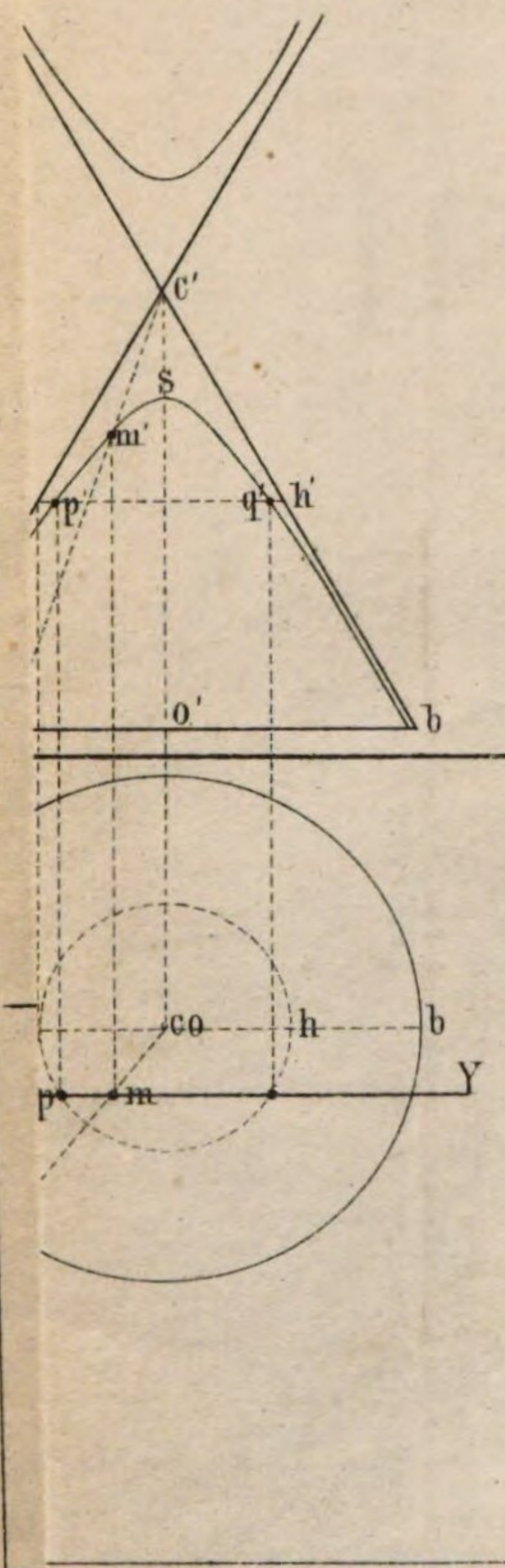


Fig. 17.



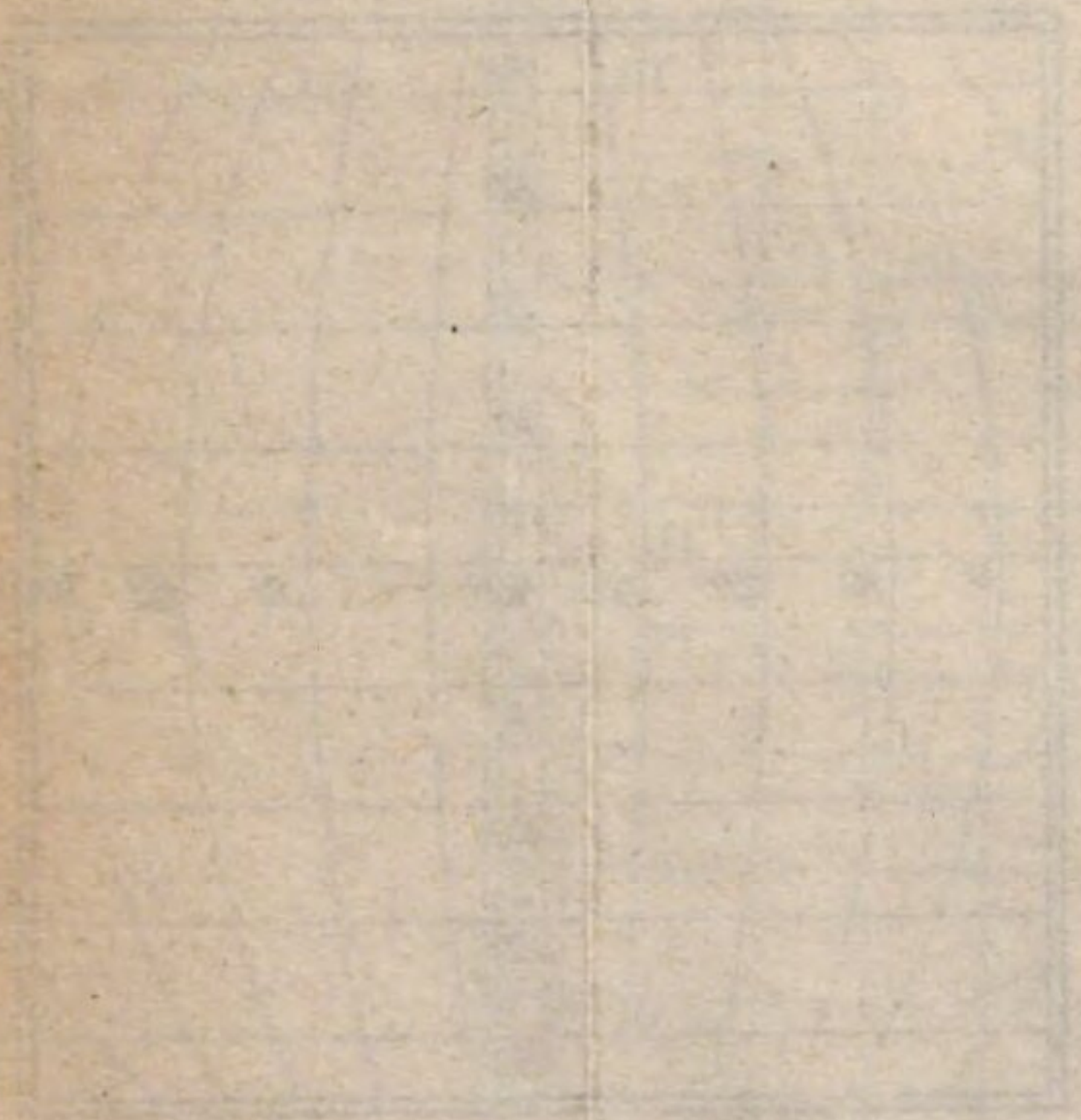
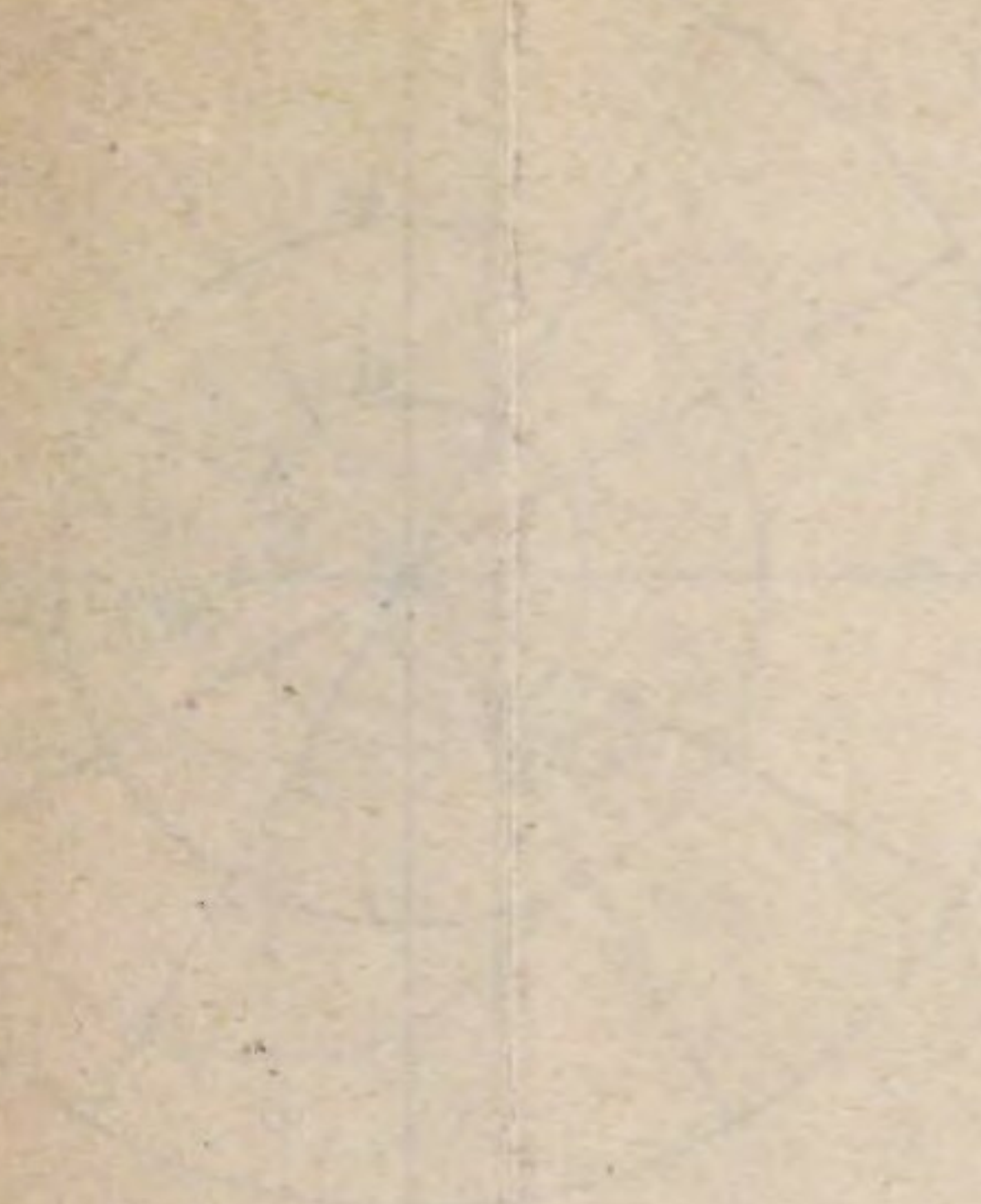


Fig.1.

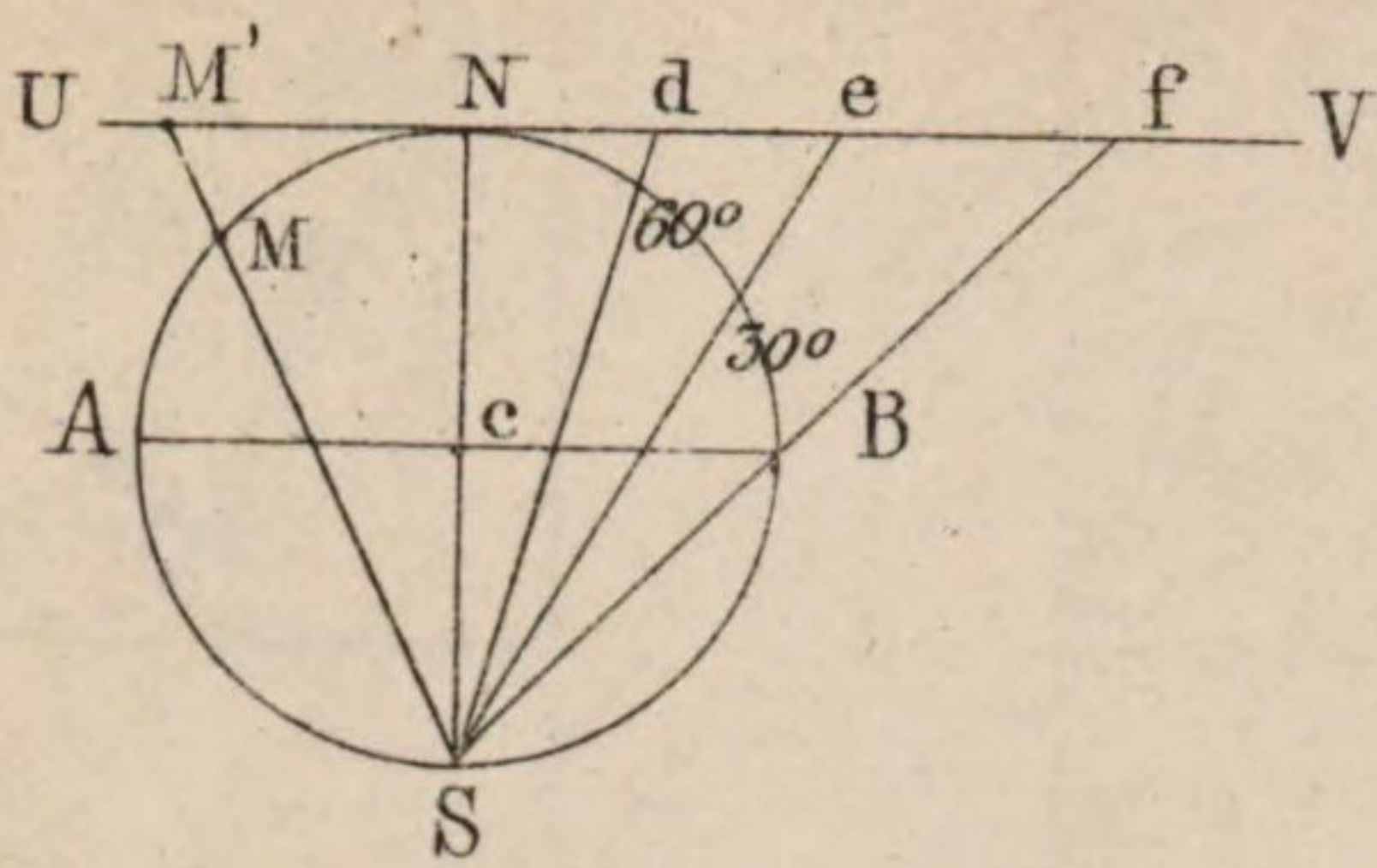


Fig.2.

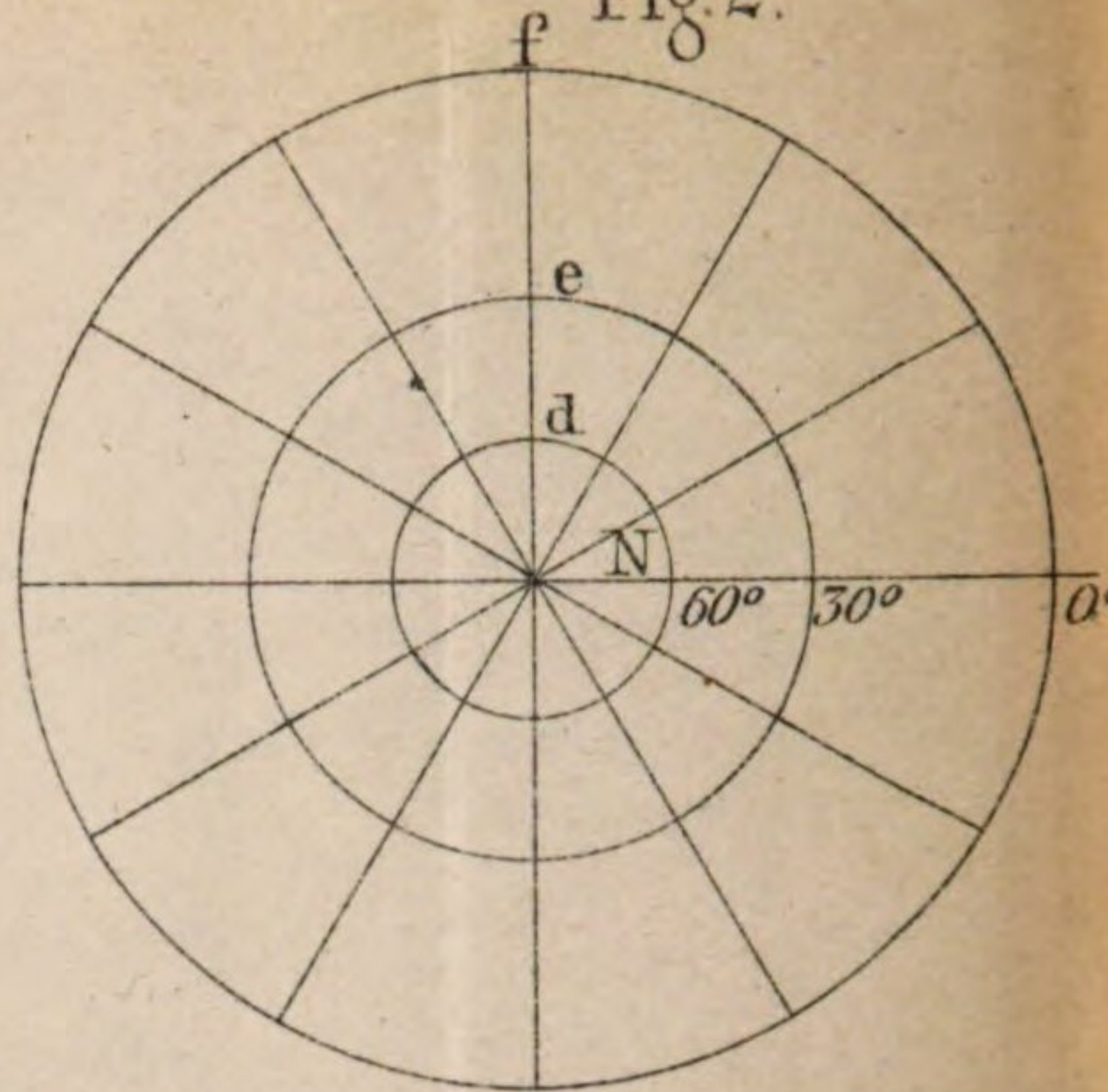


Fig.6.

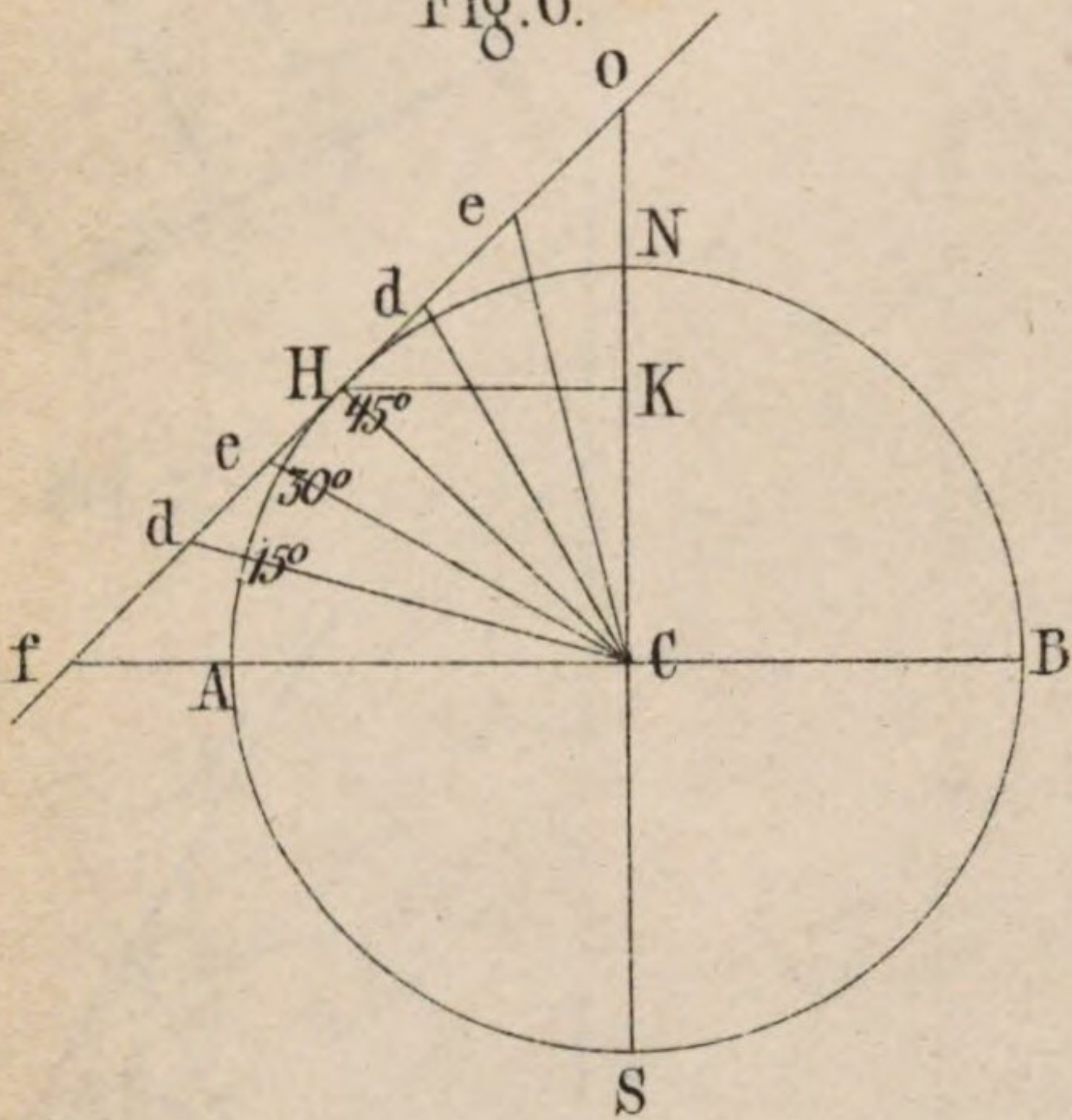


Fig.5.

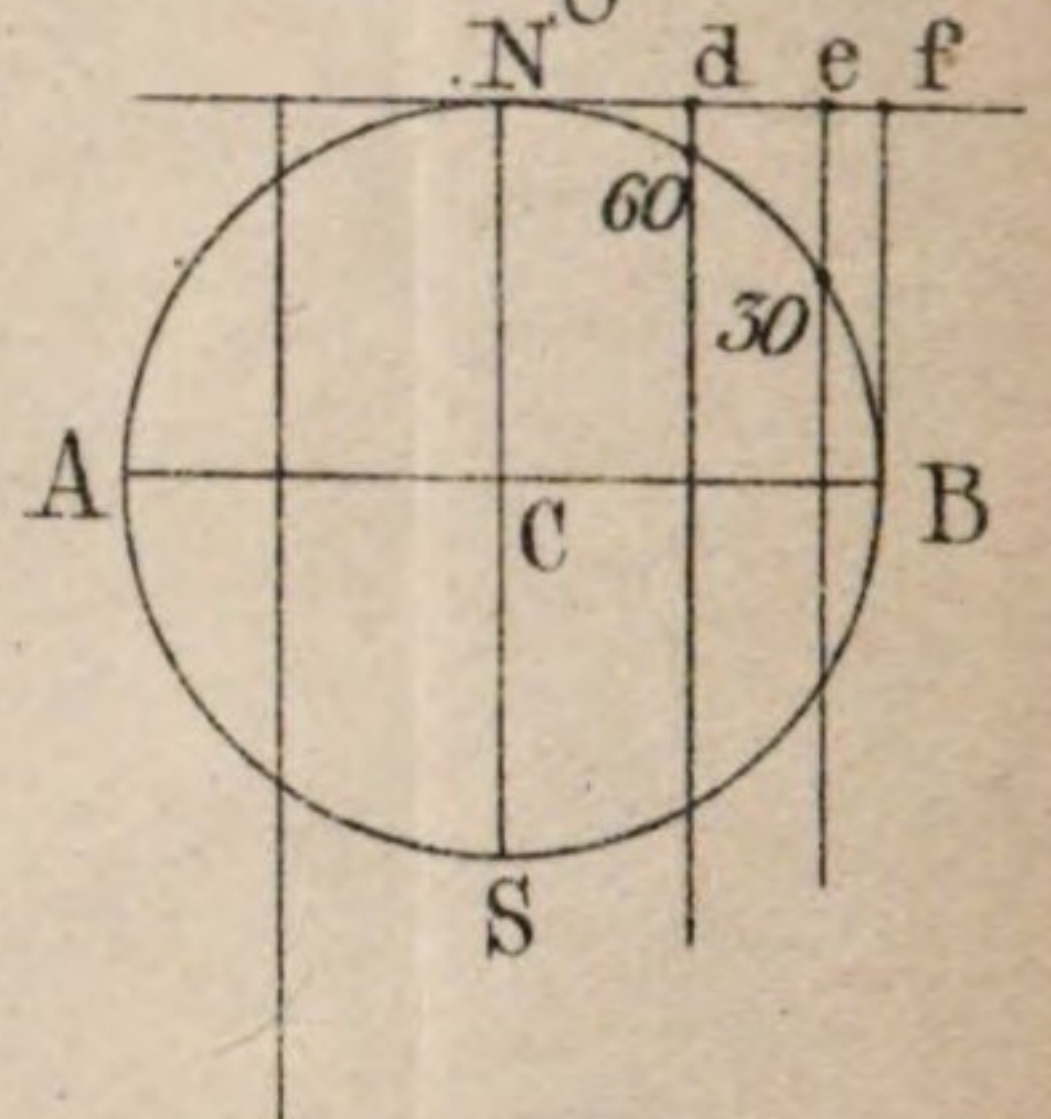
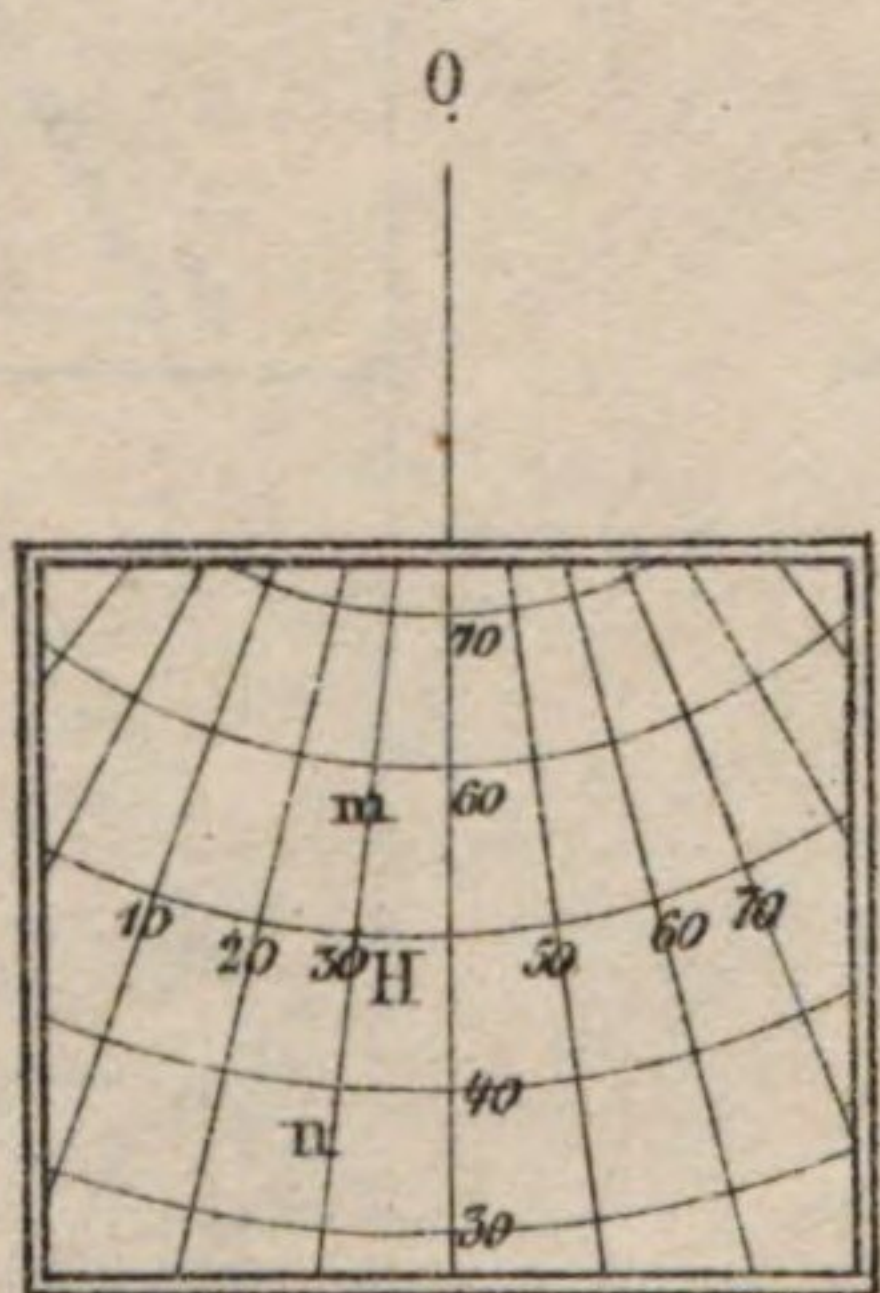
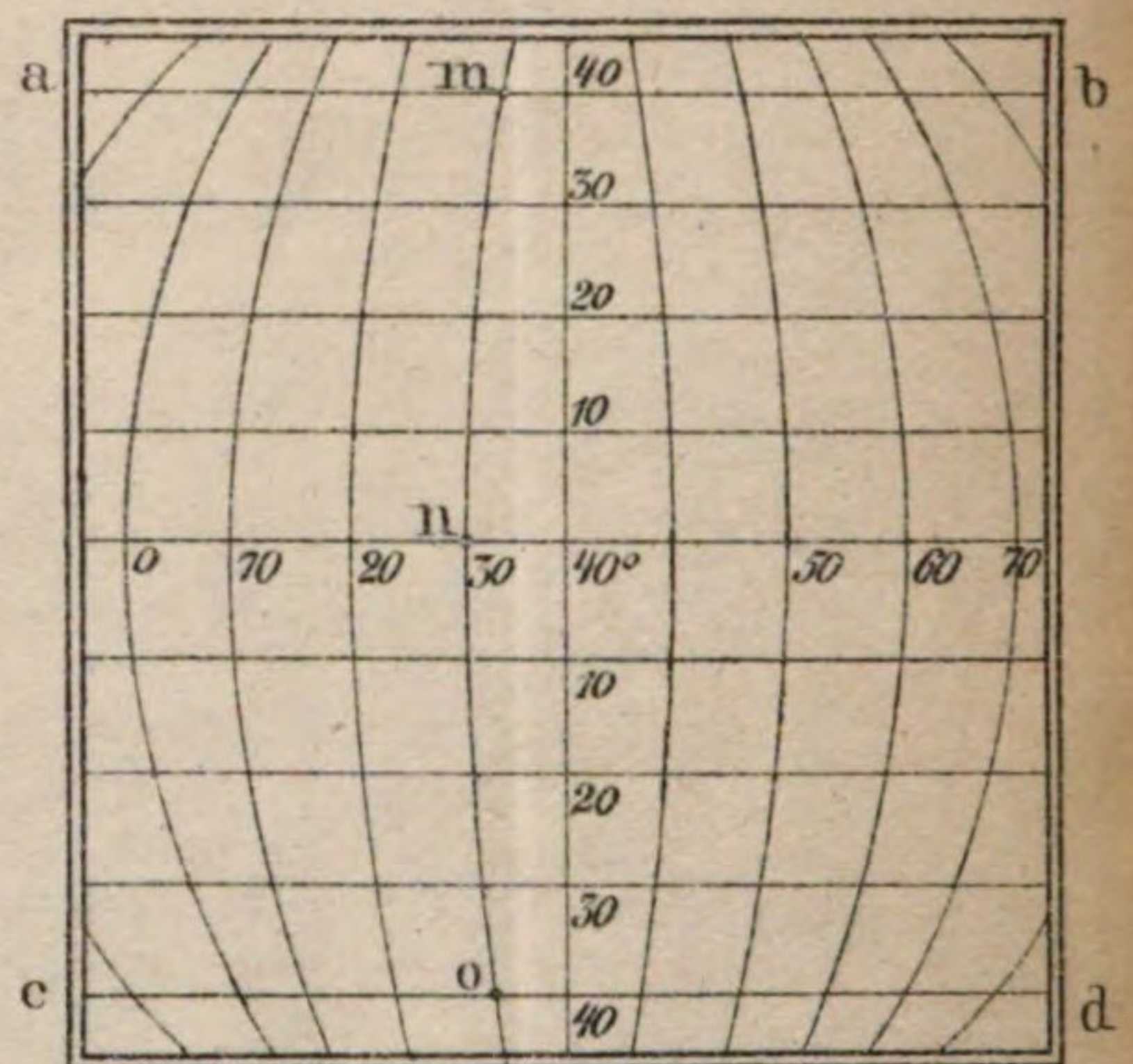


Fig.9.



Netz zu einer Karte von
Europa

Fig.10.



Netz einer Karte von Afrika.

Fig. 3.

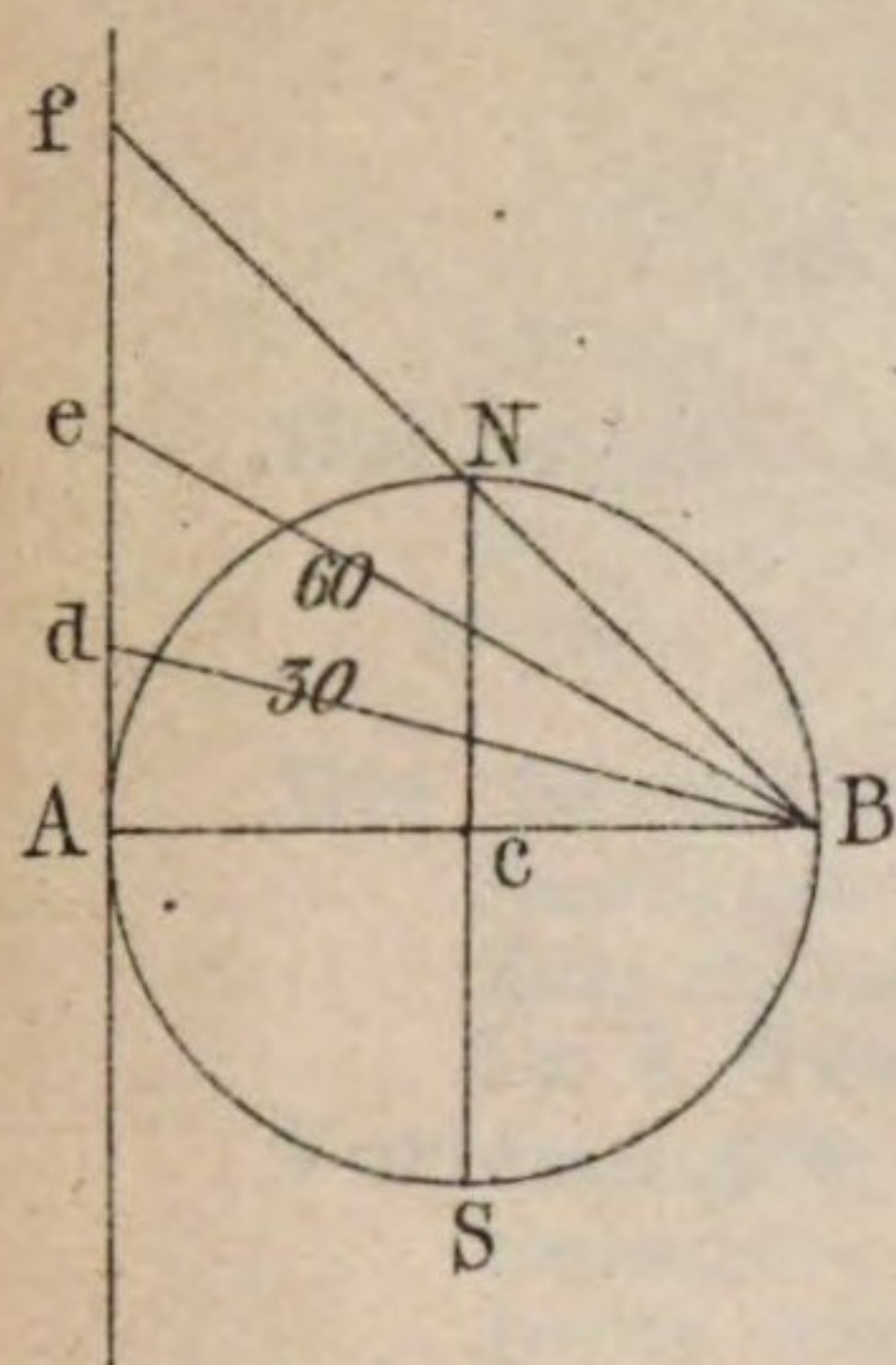


Fig. 4.

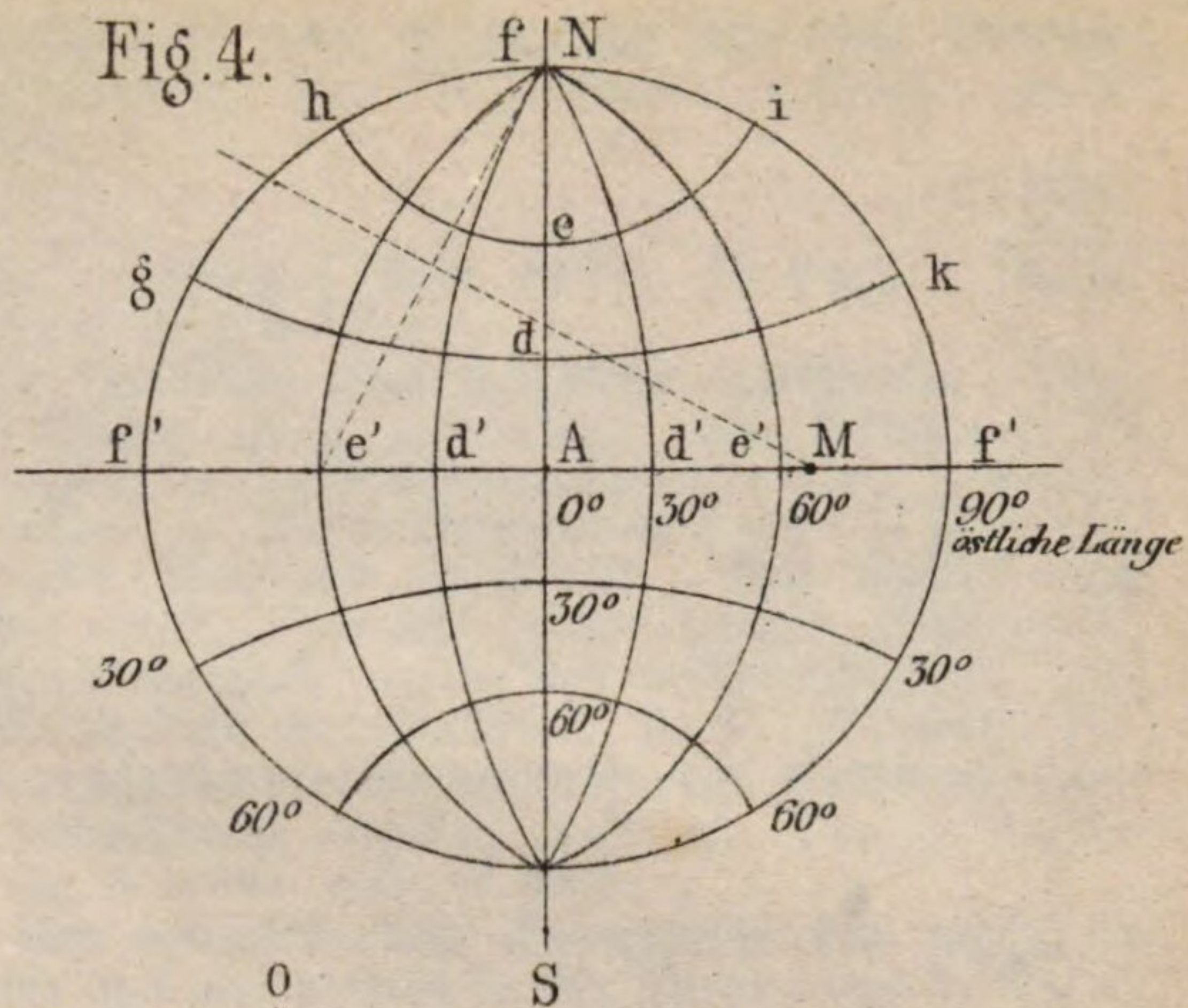


Fig. 7.

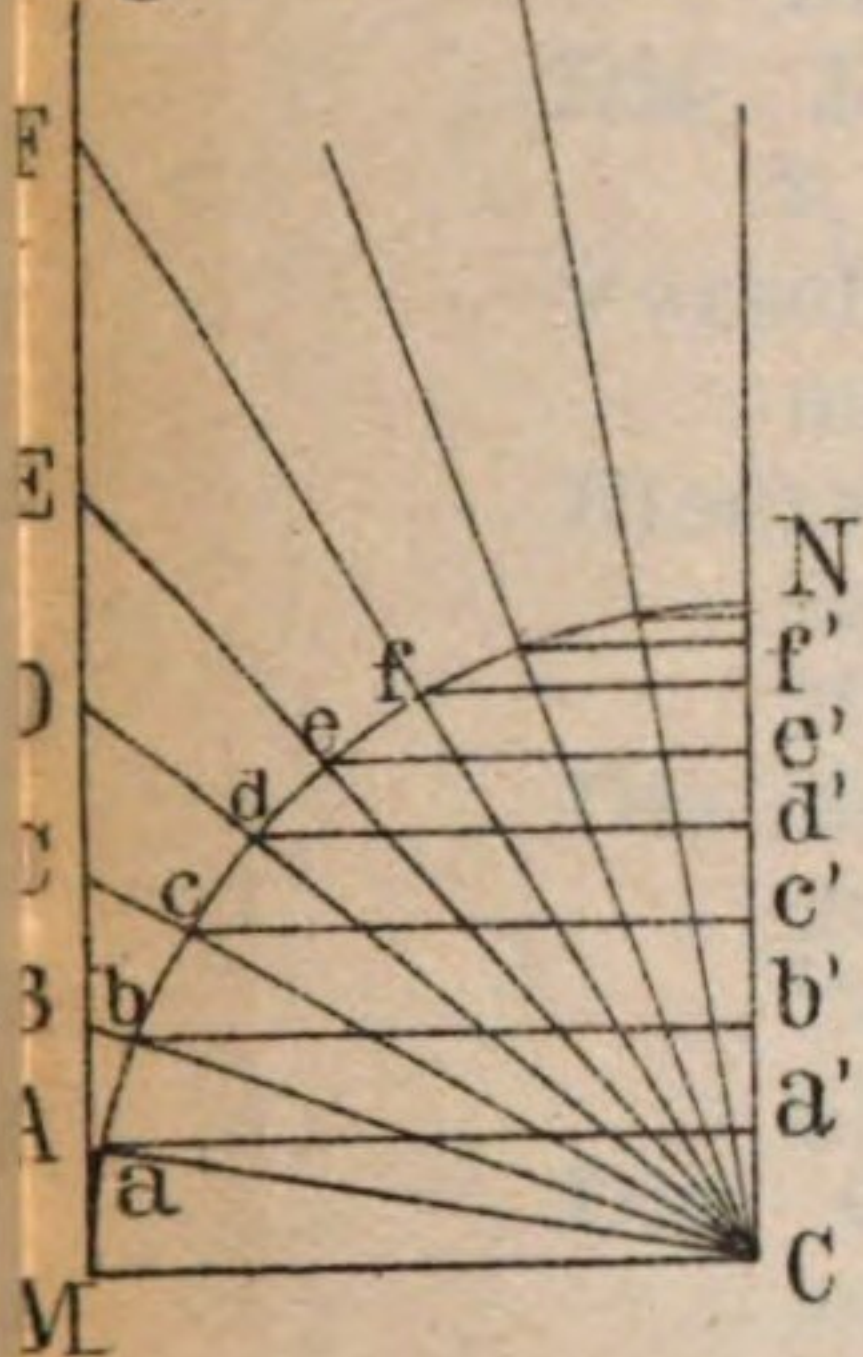


Fig. 8.

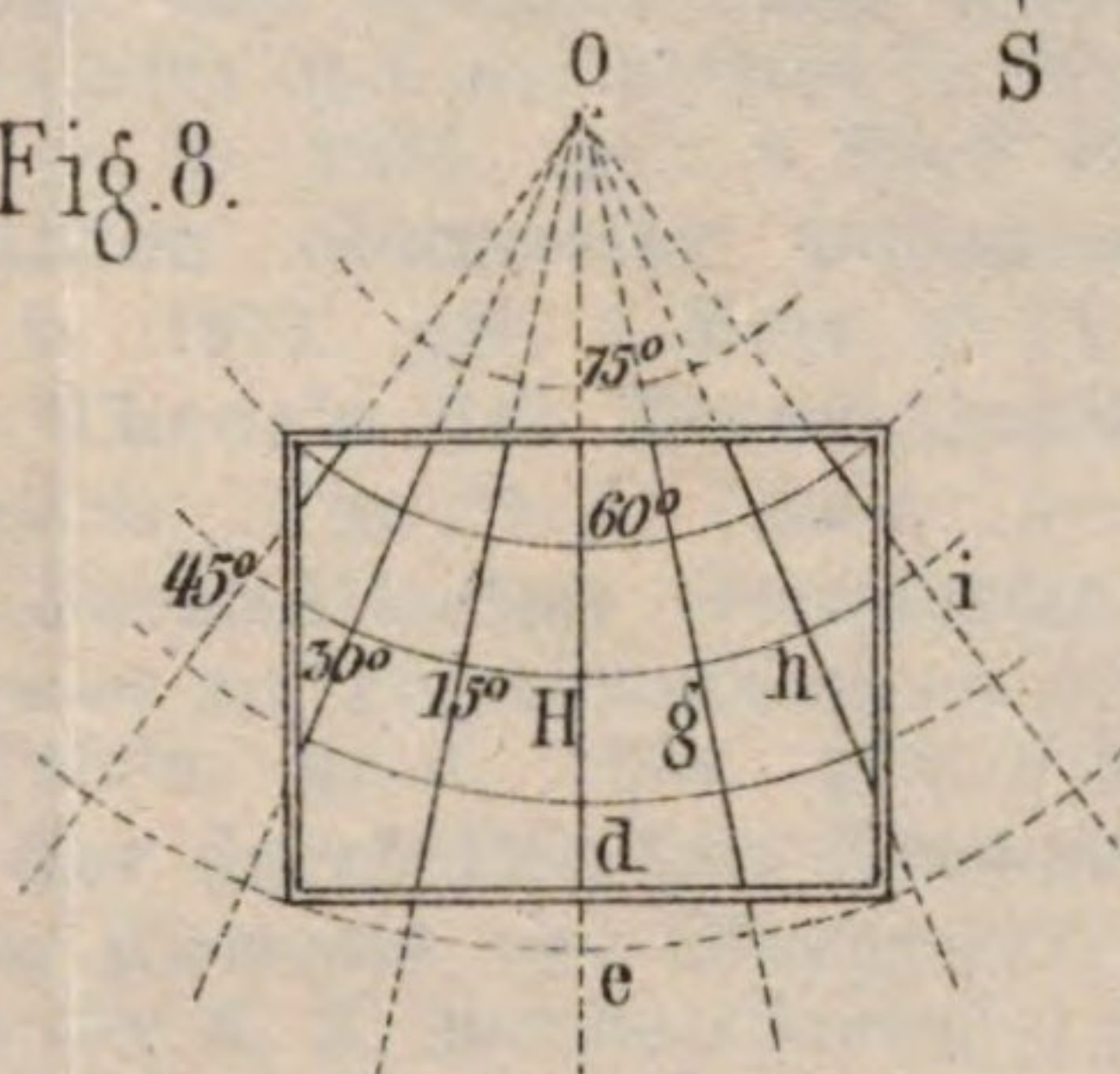
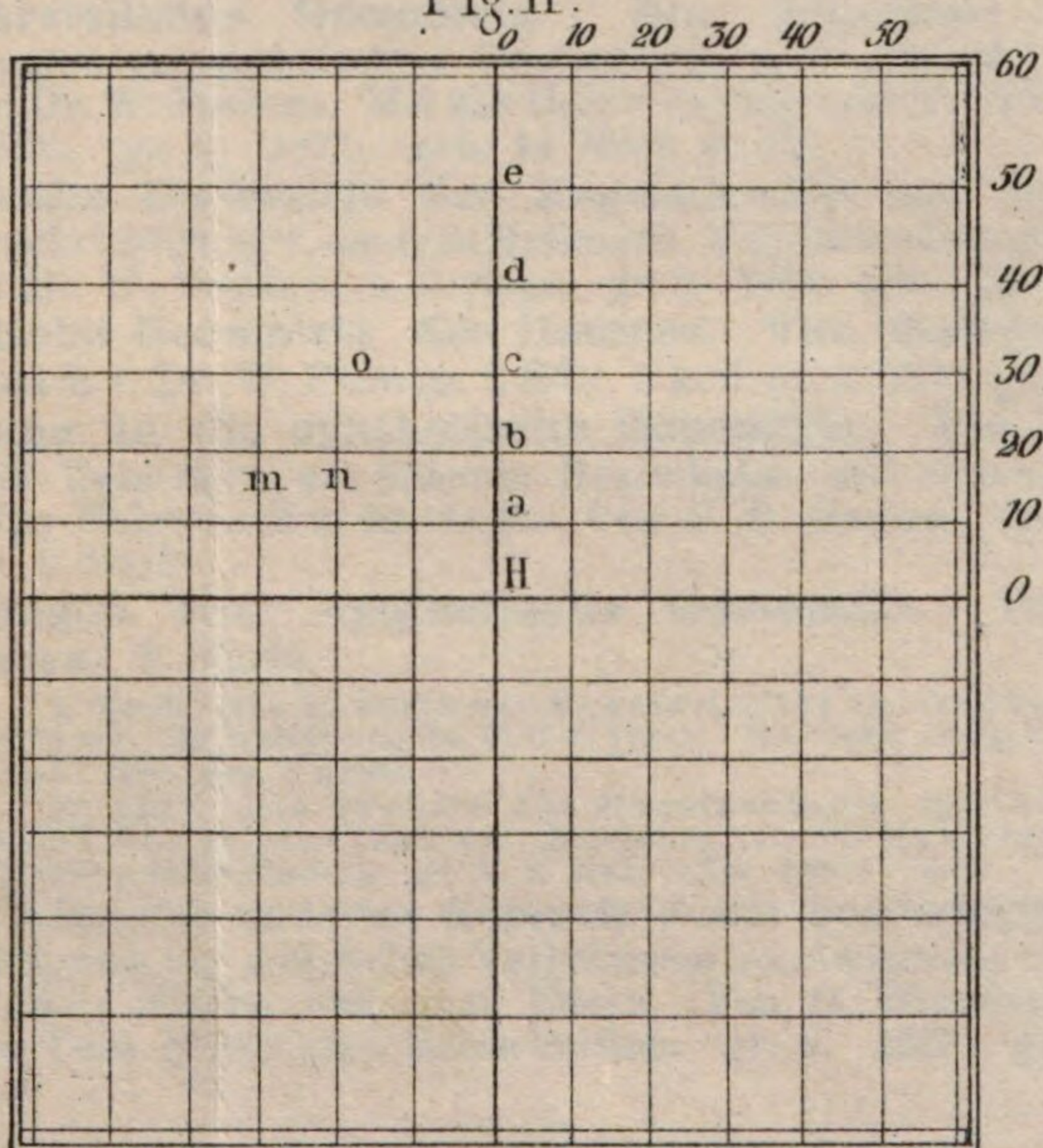


Fig. 11.



Mercator's Projection.



Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Stereo-
metrie und Trigonometrie. Von Dr. F. REIDT. 2 Theile. gr. 8.
1872. geh. 5 Mark.

I. Theil: Trigonometrie 3 Mark.

II. Theil: Stereometrie 2 Mark.

Auflösungen. I. Theil 1 Mark 80 Pf., II. Theil 1 Mark.

[Werden nur an Lehrer geliefert.]

Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Von
O. SCHLÖMILCH. 2 Theile. gr. 8. 1873—1874. geh. 13 Mark 60 Pf.

Einzeln: I. Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. 2. Aufl. 6 Mark.

II. Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung. 2. Aufl. .. 7 Mark 60 Pf.

Die Grundlehren der höheren Analysis. Ein Lehr- und
Handbuch für den ersten Unterricht in der höheren Mathematik.
Zum Gebrauch an Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. Von
Dr. J. WENCK. Mit 140 Figuren in Holzschn. gr. 8. 1872. geh. 6 Mk.

Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, ins-
besondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Von O. HESSE.
Dritte Auflage. gr. 8. 1876. geh. 13 Mark.

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden
Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Von O. HESSE.
Dritte Aufl. gr. 8. 1873. geh. 5 Mark 20 Pf.

Die Determinanten elementar behandelt von O. Hesse.
2. Aufl. gr. 8. 1872. geh. 1 Mark 20 Pf.

Vorschule der Theorie der Determinanten für Gymnasien
und Realschulen. Von Dr. L. REIDT. gr. 8. 1874. geh. 1 Mark.

Elemente der darstellenden Geometrie. Von Dr. Rudolf
STURM, Professor am Polytechnikum zu Darmstadt. Mit 12 litho-
graphirten Tafeln. gr. 8. 1874. geh. 4 Mark.

Die Methoden der darstellenden Geometrie zur Darstellung
geometrischer Elemente und Grundgebilde. Von KARL KLEKLER,
Professor an der K. K. Marine-Akademie zu Fiume. Mit 13 litho-
graphirten Tafeln. gr. 8. geh.

Die darstellende Geometrie. Ein Grundriss für Vor-
lesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium.
Von Dr. W. FIEDLER. Mit 228 Holzschnitten und 12 lithographirten
Tafeln. gr. 8. 1871. geh. 14 Mark 40 Pf.

Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer
Berücksichtigung d. neueren Methoden. Von GEORGE SALMON. Deutsch
von Dr. W. FIEDLER. 3. Auflage. gr. 8. 1873. geh. 14 Mark 40 Pf.

Analytische Geometrie des Raumes. Von George Salmon.
Deutsch v. Dr. W. FIEDLER. 2 Bde 2 Aufl. gr. 8. 1874. geh. 24 Mark.

Einleitung in die synthetische Geometrie. Ein Leitfaden
beim Unterricht an höheren Realschulen und Gymnasien. Mit
vielen Holzschnitten im Text. Von C. F. GEISER. gr. 8. 1869.
geh. 3 Mark.

Vorlesungen über synthetische Geometrie. Von Jacob
STEINER. 2 Bände.

I. Band: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Dar-
stellung. Bearbeitet von Dr. C. F. Geiser. Mit vielen Holzschnitten. gr. 8.
2. Aufl. 1875. geh. 6 Mark.

II. Band: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf pro-
jektivische Eigenschaften. Bearbeitet von Dr. Heinrich Schröter.
Mit vielen Holzschnitten. gr. 8. 2. Aufl. 1876. geh. 14 Mark.

Grundlinien der neueren Geometrie mit besonderer Berück-
sichtigung der metrischen Verhältnisse von Systemen von Punkten
in einer Graden und einer Ebene. Von B. WITZSCHEL. Mit in
den Text gedruckten Holzschnitten. gr. 8. 1857. geh. 6 Mark.

- Theorie der elliptischen Functionen.** Versuch einer elementaren Darstellung. Von Dr. H. DURÈGE. Zweite Auflage. Mit 32 Holzschnitten. gr. 8. 1868. geh. 9 Mark.
- Handbuch der höheren Algebra.** Von J. A. Serret. Deutsch bearb. v. G. WERTHEIM. 2 Bde. gr. 8. 1868. geh. 16 Mark.
- Tafeliche Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Algebra.** Ausführliche Auflösung der in Meier Hirsch's Sammlung enthaltenen Gleichungen und Aufgaben. Von J. G. Schrödter. gr. 8. 1850. geh. 3 Mark 90 Pf.
- Praktische, leichtfaßliche Anleitung zur Buchstabenrechnung und Algebra** mit vielen Beispielen und im Anschluß an die Aufgabensammlungen von Meier Hirsch und Bardey. Für Seminarien, Gewerbeschulen, höhere Bürgerschulen und zum Selbstunterricht. Von J. B. Montag. Fünfte, gänzlich umgearbeitete und stark vermehrte Auflage. (VIII u. 388 S.) gr. 8. 1877. geh. 5 Mark.
- Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung.** Von ERNST BARDEY. gr. 8. Zweite durch viele Zahlenbeispiele erweiterte vermehrte und verbesserte Auflage. 1875. geh. 6 Mark.
- Quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen höherer Lehranstalten.** Von ERNST BARDEY. gr. 8. 1871. geh. 1 Mark 60 Pf.
- Elementar-Mechanik des Punktes und des starren Systemes.** Von JULIUS HENRICI. Mit 190 Figuren in Holzschnitt. gr. 8. 1869. geh. 2 Mark 40 Pf.
- Einleitung in die theoretische Mechanik** von Dr. F. Narr. gr. 8. 1875. geh. 6 Mark.
- Theorie der Bewegung und der Kräfte.** Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik. Von WILHELM SCHELL. gr. Lex.-8. 1868—70. geh. 14 Mark.
- Aufgaben aus der analytischen Mechanik.** Von A. Fuhrmann. 1. Heft. 1867. gr. 8. geh. 2 Mark. 2. Heft. 1871. gr. 8. geh. 3 Mark 60 Pf.
- Mathematische Aufgaben aus der Physik nebst Auflösungen.** Von E. KAHL. Mit vielen Holzschn. 2. Aufl. gr. 8. 1874. geh. 5 Mark.
- Leitfaden der praktischen Physik.** Mit einem Anhang: Das elektrische und magnetische Masssystem. Von F. KOHLRAUSCH. 3. Aufl. gr. 8. 1877. geh. 5 Mark.
- Lehrbuch der Experimentalphysik** von Dr. Adolph Wüllner. 3. Aufl. 4 Bände. 1874—1875. gr. 8. geh. 41 Mark.
- Grundriss der allgemeinen mechanischen Physik.** Die wichtigsten Lehrsätze der Mechanik fester, flüssiger und gasförmiger Körper, der mechanischen Wärmetheorie und der Potentialtheorie nebst einer mathematischen Einleitung. Für Studierende an Hochschulen und für Lehramtsandidaten. Von A. v. WALTENHOFEN, Prof. zu Prag. (XII u. 361 S.) gr. 8. 1875. geh. n. 8 M.
- Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie** nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen. Von THEODOR WAND. Mit Holzschnitten. gr. 8. 1871. geh. 3 Mark.
- Eine elementare Methode zur Bestimmung von grössten und kleinsten Werthen,** nebst vielen Aufgaben. Von Dr. HERM. HEILERMANN. Mit 21 Holzschnitten. gr. 8. 1871. geh. 2 Mark 40 Pf.

Müller, Hubert,

Leitfaden der Stereometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die
Schule ; in zwei Theilen

Bd.: 1

Leipzig 1877

Math.p. 364 fc-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11358699-9